UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CAMPUS CASCAVEL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FABRÍCIO ADRIEL RUSTICK
MAÍRI POETA CORTINA CASTILHO DA SILVA
MICHELLI NEVES LAVAGNOLI
MILLENI FERREIRA DE SOUZA

RELATÓRIO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO PROMAT METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO: ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

CASCAVEL
2024

FABRÍCIO ADRIEL RUSTICK
MAÍRI POETA CORTINA CASTILHO DA SILVA
MICHELLI NEVES LAVAGNOLI
MILLENI FERREIRA DE SOUZA

RELATÓRIO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO PROMAT METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO: ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

Relatório das atividades desenvolvidas durante o projeto Promat, apresentado como requisito parcial à aprovação na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II do Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, campus Cascavel.

Orientadores: Andréia Büttner Ciani e Jesus Marcos Camargo

CASCAVEL
2024

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Este relatório refere-se às atividades desenvolvidas no âmbito do PROMAT - Programa de Acesso e Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: um enfoque à área da Matemática, promovido pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), campus Cascavel. O programa, que nesta versão conta com a realização de 10 encontros realizados aos sábados pela manhã, integra o planejamento da disciplina "Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II" do curso de Licenciatura em Matemática.

Este trabalho tem como objetivo relatar as experiências e aprendizagens adquiridas ao longo do estágio, destacando as ações realizadas e suas contribuições para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Durante as aulas, buscamos criar um ambiente diferente do modelo tradicional comumente encontrado em salas de aula, mais descontraído e acolhedor. Para isso, adotamos diferentes metodologias que incluíram o uso de tecnologias educacionais, a aplicação de metodologias ativas e a elaboração de jogos e músicas adaptadas a conceitos matemáticos. As atividades propostas tiveram como objetivo não apenas ensinar conteúdos, mas engajar os participantes e promover uma experiência de aprendizagem dinâmica e significativa.

A organização deste relatório segue uma estrutura bem definida. Primeiramente, apresentamos um artigo de nossa autoria, elaborado a partir de reflexões desenvolvidas ao longo do estágio. Em seguida, descrevemos os planos de aula desenvolvidos para os encontros, juntamente com os respectivos relatórios de execução. Por fim, apresentamos nossas considerações finais, refletindo sobre os resultados alcançados e as aprendizagens proporcionadas por essa experiência.

SEÇÃO 1 – RELATO DE EXPERIÊNCIA: UM JOGO PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

INTRODUÇÃO

O estudo de conceitos relacionados a Probabilidade é algo relevante na formação matemática dos estudantes, pois está diretamente relacionado à tomada de decisões em diversas situações do cotidiano. Maciel e Barbosa, destacam que

> A probabilidade é um importante objeto do saber matemático, amplamente presente em uma diversidade de atividades relacionadas ao nosso cotidiano. É através desse saber que devemos desenvolver já em nossa infância as ideias de aleatoriedade, acasos, certezas e incertezas (2024, p. 02).

Dessa forma, ao inserir o ensino de Probabilidade de maneira significativa, os alunos podem compreender melhor fenômenos reais, como previsões climáticas, jogos de azar e outras aplicações práticas que influenciam suas vidas.

Porém, os conteúdos relacionados à Estatística e à Probabilidade frequentemente recebem pouca atenção na Educação Básica. Quando abordados, muitas vezes são tratados de maneira superficial, com grande foco na teoria e pouca aplicação prática. Esse cenário se deve, em parte, à limitação de tempo dentro da disciplina de Matemática, que precisa explorar diversos conteúdos ao longo do ano letivo. Nesse sentido, Magalhães aponta que

> A efetiva presença de Estatística nos currículos escolares tem variado bastante. Muitas vezes o tempo é escasso, na disciplina de Matemática, para desenvolver todos os conteúdos previstos e os tópicos de Estatística são preteridos. Existem casos em que os conteúdos são trabalhados de forma mecânica. (Magalhães, 2016, p. 01).

Nessa perspectiva, levando em consideração que conteúdos como esses são frequentemente abordados em conteúdos de provas de vestibular, concursos ou até mesmo no Exame Nacional do Ensino Médio, vemos a relevância de proporcionar aos alunos oportunidades para explorar esses tópicos. Assim, o Programa de Acesso e Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas:

Um Enfoque à área da Matemática – PROMAT, surge como uma boa possibilidade para aprofundar esses conhecimentos.

O PROMAT

O PROMAT, é um projeto desenvolvido pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, campus Cascavel. O programa é dividido em duas etapas por ano, sendo cada uma composta por 10 encontros realizados aos sábados. As aulas são ministradas pelos discentes do curso, matriculados nas disciplinas de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I e II.

Na primeira etapa do programa são explorados conteúdos matemáticos referentes ao currículo do Ensino Fundamental – Anos Finais. Já na segunda etapa, são abordados conceitos matemáticos vistos no Ensino Médio. Nesta segunda etapa, está prevista abordagem de tópicos de Probabilidade e Estatística, sendo eles: experimento aleatório, espaço amostral, tipos de variáveis e eventos, cálculo de probabilidades, probabilidade condicional, medidas de tendências centrais, medidas de dispersão, variância e desvio padrão.

Assim, o PROMAT desempenha um papel significativo no ensino de Probabilidade e Estatística, oferecendo aos estudantes a oportunidade de explorar esses conteúdos de forma mais aprofundada e contextualizada. Além disso, possibilita que futuros professores, por meio dessa experiência desenvolvam experiências práticas no ensino da Matemática, aprimorando suas metodologias e explorando formas mais dinâmicas de abordagens desses temas. Dessa forma, o programa não apenas ajuda a suprir uma lacuna no ensino tradicional, onde muitos conteúdos são tratados de maneira superficial, mas também incentiva uma formação mais sólida tanto para os alunos da educação básica quanto para os licenciandos.

Relato de Experiência: Atividade Desenvolvida no PROMAT para o Ensino de Probabilidades

É importante que a abordagem da Estatística e Probabilidade no ensino vá além de aplicações de fórmulas seguidas de cálculos mecânicos, mas que priorize a compreensão dos conceitos e suas aplicações em contextos reais para os estudantes. Magalhães afirma que

> [...] a Estatística trabalha com números em contexto. No processo de ensino-aprendizagem precisamos estar atentos para enfatizar ideias, ao invés de apenas cálculos, e usar dados reais de quantidades de interesse dos estudantes (Magalhães, 2016, p. 02).

Assim, a aprendizagem se torna mais significativa, pois os alunos conseguem relacionar os conteúdos com situações do dia a dia. Incorporar exemplos práticos e contextualizados pode não apenas facilitar a assimilação dos conceitos, mas também despertar maior interesse e engajamento dos alunos.

Desse modo, nos preocupamos durante o planejamento das atividades do PROMAT em elaborar atividades que proporcionariam sentido ao conteúdo estudado. No contexto do ensino de Estatística e Probabilidade, procuramos relacionar os conceitos com algo presente na realidade dos estudantes que vem ganhando destaque no meio digital, os jogos de azar. É notório que

> [...] esses jogos se tornaram uma epidemia em 2023, expondo o quanto a sociedade brasileira está vulnerável a vícios em apostas e jogos de azar, vícios esses que eram controlados antes do livre acesso a servidores de internet, levando em consideração que em 2023 os cassinos ainda estão proibidos no Brasil (Fazolin, Almeida, 2023, p. 715).

No entanto, segundo Lopes e Meirelles (2005), os jogos de azar estão diretamente relacionados aos conceitos de Probabilidade, pois envolvem eventos aleatórios cujas chances de ganhos são, na maioria das vezes, extremamente baixas. Assim, a educação da intuição probabilística é fundamental para conscientizar os alunos sobre a natureza probabilísticas desses jogos.

Nesse sentido, vemos a relevância em explorar jogos de azar ao trabalhar conceitos de Estatística e Probabilidade, além de abordar esses conceitos podemos gerar uma conscientização nos estudantes dos riscos eminentes desses jogos. Para isso, confeccionamos uma máquina caça-níquel, à denominando de *jogo da ov’*.

O jogo da ov’ leva este nome por conta de uma das simbologias matemática que é utilizada para denotar a derivada (’), do qual temos o costume de chamar como linha, desta forma passamos a ler ov’ como ‘ovelinha”, dentre outros ‘animais matemáticos’ que entre nós e nossos colegas encontramos como h’ e a ab’. Como se trata de uma dinâmica, a ideia de nomear desta forma vem como uma brincadeira correlacionando com o ‘Jogo do Tigrinho’, com o intuito de tratarmos os conceitos de probabilidade utilizando do qual contexto o aluno possui um certo entendimento, que se assemelha a metodologia Construtiva e Freiriana.

Desta forma, a Metodologia Freiriana se faz presente ao considerarmos que o conhecimento deve partir da realidade do aluno, usando elementos do seu dia a dia para despertar o interesse e a compreensão dos conceitos matemáticos. Paulo Freire enfatizava a importância de uma educação dialógica, na qual o estudante participa ativamente do processo de aprendizagem, sendo incentivado a refletir criticamente sobre o conteúdo apresentado. Como diz Freire (1996, p. 25) “Ensinar não é transferir o conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”.

Além disso, a Metodologia Construtiva entra em cena ao proporcionar um ambiente no qual os alunos constroem seu próprio conhecimento de maneira ativa. Ao invés de apenas memorizar regras e fórmulas, são incentivados a experimentar, testar hipóteses e interagir com os colegas, favorecendo uma aprendizagem de qualidade.

A proposta de utilizar uma dinâmica que faz referência ao ‘Jogo do Tigrinho’ reforça essa abordagem, pois dialoga diretamente com o universo dos alunos, proporcionando um contexto em que eles se sentem confortáveis para explorar os conceitos matemáticos. Esse tipo de estratégia traz motivação e engajamento, promovendo uma aprendizagem que vai além da simples reprodução de cálculos e se aproxima de uma compreensão mais profunda da matemática.

Portanto, a integração entre a Metodologia Freiriana e Construtiva nessa proposta didática permite que os alunos desenvolvam autonomia, senso crítico e uma relação mais significativa com a matemática. Dessa maneira, a ludicidade e a contextualização tornam-se ferramentas essenciais para transformar o aprendizado em uma experiência mais enriquecedora.

O jogo da ov’ foi elaborado com objetivo auxiliar os alunos na compreensão do conceito de espaço amostral e no cálculo de probabilidades, utilizando uma roleta de papelão. Para isso, informamos que cada aluno giraria a roleta três vezes consecutivas e deveria anotar as imagens sorteadas em cada rodada. E que caso alguém deles conseguisse obter as três imagens iguais, receberia um doce como prêmio.

Inicialmente, um aluno se voluntariou para começar a atividade, mas, para melhor organização, chamamos os alunos por ordem de fileiras. Cada um teve três oportunidades para girar a roleta e registrar o resultado. Durante a atividade, uma das primeiras alunas girou a manivela além do limite que o elástico suportava, danificando o material, mas apesar disso, ainda era possível que as roletas girassem.

No entanto, percebemos que a atividade estava levando mais tempo que o planejado, pois os alunos precisavam girar a roleta três vezes e registrar suas combinações. Para agilizar o processo, adaptamos a dinâmica: representamos os símbolos em pedacinhos de papel, dobramos e passamos pelas carteiras para os alunos sortearem três imagens. Criamos três papéis para cada símbolo e organizamos o sorteio de forma que três de nós passavam nas carteiras, cada um segurando sete papeizinhos, enquanto outro estagiário continuava coordenando a atividade com a roleta produzida.

Após essa etapa inicial, fizemos uma explicação sobre como calcular a probabilidade de cada evento. Os alunos, então, utilizaram suas anotações para determinar a probabilidade de obter as combinações que registraram. Auxiliamos na verificação dos cálculos e discutimos os resultados com a turma.

O jogo serviu apenas uma simulação educativa, sem qualquer envolvimento com apostas. Cada aluno deveria corretamente os resultados para que os cálculos fossem feitos de maneira precisa. Ao final da atividade, apenas um aluno conseguiu obter três imagens idênticas e foi premiado com um bombom. A experiência mostrou a importância da adaptação durante a prática pedagógica, garantindo que os objetivos fossem alcançados mesmo diante de imprevistos.

Conclusão

A experiência relatada evidência a importância de abordar a Estatística e a Probabilidade de maneira contextualizada e lúdico, proporcionando aos alunos oportunidades de compreender esses conceitos a partir de situações que presenciam no cotidiano. Uma vez que a utilização do jogo da ov’ demonstrou-se uma estratégia eficaz para tornar o ensino de Probabilidade mais acessível e envolvente, permitindo que os estudantes interagissem ativamente com os conteúdos matemáticos por meio de uma abordagem lúdica, uma vez que os alunos se mostraram engajados em realizar as atividades propostas.

Além disso, ao adotar as metodologias Freiriana e Construtiva, conseguimos alinhar o ensino da matemática a realidade dos alunos, estimulando a reflexão, a participação ativa e a construção do conhecimento de forma autônoma. No jogo proposto, ao interagir com a roleta ou com os papeizinhos sorteados, os alunos foram incentivados a observar, registrar e interpretar resultados. Assim, ao invés de apenas memorizar fórmulas e aplicar regras mecanicamente, os estudantes puderam compreender a essência dos conceitos probabilísticos e reconhecer sua aplicabilidade em outros contextos de forma prática e lúdica.

Todavia, iniciativas como essa reforçam a necessidade de inovar no ensino da matemática, utilizando estratégias que vão além da abordagem tradicional e incentivam a formação de alunos mais críticos e conscientes. O PROMAT, ao possibilitar esse tipo de experiência, não apenas amplia o repertório dos estudantes, mas também contribui significativamente para a formação de futuros professores, que têm a oportunidade de vivenciar diferentes práticas pedagógicas alinhadas às necessidades do ensino contemporâneo.

REFERÊNCIAS

FAZOLIN, D. K. V. C.; ALMEIDA, A. A. A importância da regulamentação sobre os Jogos de Azar Online. **Ibero**, São Paulo, v. 9, n. 12, p. 711-727, dez. 2023.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. Editora Paz e terra, 2014.

LOPES, C. E.; MEIRELLES, E. O Desenvolvimento da Probabilidade e Estatística. *In:* Encontro Regional de Professores de Matemática – LEM/IMECC/UNICAMP. UNICAMP, 18, 2005, Campinas.

MACIEL, M. M.; BARBOSA, E. J. T. UMA REVISÃO DE LITERATURA SOBRE A PROPOSIÇÃO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA. **Bocehm**, Fortaleza, v. 11, n. 33, p. 1-25, out. 2024.

MAGALHÃES, M. N. Atividades Para o Ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2016, São Paulo. Anais... São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/10/magalhaes-simposio.pdf. Acesso em: 15 fev. 2025.

SEÇÃO 2 – PROMAT

O Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: um Enfoque à Área de Matemática – Promat tem seu foco em desenvolver ações para promover o acesso e a permanência de estudantes da rede pública de ensino na Unioeste. O Promat oferece cursos de matemática para concluintes do ensino médio, visando fortalecer e ampliar a compreensão de conteúdos matemáticos relevantes ao bom desempenho, tanto nos exames para ingresso quanto no decorrer de um curso de nível superior.

O objetivo é promover uma situação de acolhimento e dinâmica para envolver os participantes no estudo de conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. No caso em questão, assume-se a responsabilidade pelos conteúdos de Ensino Médio.

O público-alvo do Promat são estudantes que cursam a Educação Básica em escolas públicas. Em cada etapa de vigência do projeto, são disponibilizadas 200 vagas. Os participantes do Promat, de modo geral, são oriundos da cidade de Cascavel e de outras circunvizinhas vinculadas ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel.

O projeto tem como objetivo contribuir para o acesso e a permanência de estudantes nos cursos de graduação do Centro de Ciências e Exatas e Tecnológicas da Unioeste, por meio de fornecer o “Curso Preparatório de Matemática”. Mais especificamente, objetivamos promover apoio educacional aos alunos oriundos da Educação Básica com dificuldades de aprendizagem em Matemática, minimizando reprovações, tempo de integralização curricular, desperdícios de recursos públicos, desmotivação, evasão escolar, falta de conhecimento em conteúdos matemáticos básicos necessários a uma continuidade em estudos. Ainda, o Promat oferece a oportunidade de um aprofundamento em conhecimento matemático àqueles estudantes que pretendem dar continuidade a seus estudos em nível superior na área de Ciências Exatas.

No segundo semestre do ano letivo de 2024, referente aos conteúdos de Ensino Médio, foram constituídas 5 salas de aulas aos sábados. Nosso grupo se responsabilizou por uma sala constituída, inicialmente, por 24 alunos. O quadro a seguir apresenta as datas e conteúdo que foram abordados em cada encontro.

Quadro 1 – Divisão dos conteúdos para o PROMAT – Ensino Médio - 2024

Conteúdos	Encontros	Datas
Análise combinatória	Princípio Fundamental da Contagem; Fatorial; Arranjo Simples; Permutação Simples; Combinação Simples.	24/08
Probabilidade e Estatística	Experimento aleatório, espaço amostral, tipos de variáveis e eventos; Cálculo de Probabilidades; Probabilidade Condicional; Medidas de Tendências Centrais (Moda, Média e Mediana); Medidas de dispersão, variância e desvio padrão.	31/08
Matrizes e Determinantes	Noção de Matrizes; Tipos de Matrizes; Igualdade de Matrizes; Soma, Subtração e Multiplicação; Definição e propriedades de determinantes; Teorema fundamental de La Place; Cálculo de Determinantes.	14/09
Sistemas Lineares	Definição de equação linear, definição de sistema de equações lineares, definição de solução de um sistema; Regra da Soma e substituição (Sistema 2x2); Representação gráfica das equações lineares; Classificação de um sistema linear (sistema possível e determinado, sistema possível e indeterminado e sistema impossível); Sistemas Lineares Homogêneos (definição e exemplos); Forma Matricial; Regra de Crammer.	21/09 e 28/09
Geometria Analítica	Definição do plano cartesiano (Conceitos primitivos); Definir distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento; Equação geral da reta Equação reduzida da reta; Coeficiente angular de uma reta; Distância entre pontos e retas; Definir posição relativa entre retas; Circunferência equação geral e reduzida.	05/10

Trigonometria	Triângulo Retângulo; Definição de seno, cosseno e tangente; Ângulos notáveis; Lei do seno e cosseno. Círculo trigonométrico; Definição de radianos; Relações fundamentais; Soma e multiplicação de arcos.	26/10 e 09/11
Funções Trigonométricas	Representação gráfica; Domínio, Imagem, Contra-Domínio; Período, frequência e amplitude; Função par e ímpar.	23/11
Gincana Final	**Quebra cabeça e raciocínio lógico:** A gincana com os quebra-cabeças consiste em resolver o problema de raciocínio lógico de cada envelope para obter as peças dos quebra-cabeça. Vale ressaltar que o grupo só pegará o próximo envelope se ele conseguir montar todas as peças que já possui. O quebra-cabeça montado inteiro vale 10 pontos (0,25 vezes cada peça montada), caso haja empate, o desempate é realizado através da maior quantidade de peças montadas no menor número de tempo. **Adivinhando Volume, comprimento e peso:** Cada grupo deverá estimar o volume, peso e comprimento dos objetos indicados. Serão 4 objetos para estimar o volume, 3 objetos para estimar o peso e 3 objetos para estimar o comprimento. Os objetos escolhidos para a unidade de medida peso foram uma caixa com bolinhas de gude (1,100 kg), um notebook (1,730 kg), um kindle (255g) e uma garrafa com um pouco de água (75g). Para a unidade de medida comprimento, foram escolhidos uma caixa (20,5cm), um canudo de formatura (31cm) e um pedaço de barbante (1,65m). Por fim, para o volume, foram escolhidos uma tampinha (10ml), um cilindro obliquo (1400ml) e um poliedro (750ml).	30/11

	A pontuação de cada grupo será atribuída de acordo com as medidas informadas mais próximas das corretas	

2.1 AULA 01 (24/08/2024) – PLANO DE AULA E RELATÓRIO

PLANO DE AULA 1 (24/08/2024)

Fabrício Adriel Rustick
Maíri Poeta Castilho da Silva
Michelli Neves Lavagnoli
Milleni Ferreira de Souza

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio
Tempo de execução: 4 horas-aula
Conteúdo: Análise combinatória
Objetivo Geral: Abordar o conteúdo de forma dinâmica, relembrar o que já foi ensinado na escola, trabalhar com o cálculo mental e propor questões referentes aos princípios, agrupamentos e métodos de contagem básicos da Análise Combinatória.

Objetivos Específicos:
Ao se trabalhar com Análise Combinatória, objetiva-se que os alunos sejam capazes de:

- reconhecer em quais situações é possível utilizar a Análise Combinatória;
- conhecer o princípio fundamental da contagem;
- definir fatorial e suas propriedades;
- classificar os agrupamentos em Permutação, Arranjo e Combinação, com ênfase em suas diferenças;
- resolver situações problemas por meio dos conceitos do princípio fundamental da contagem, do fatorial, do arranjo simples, da permutação e da combinação simples.

Recursos Didáticos: Barbante, quadro, giz, caderno, lápis, borracha, caneta, folha sulfite, cadeira, slides, retroprojetor e computador.

Encaminhamento metodológico:

1- Apresentação do Curso Promat (10 min)

Vamos iniciar o primeiro encontro com uma saudação de boas-vindas aos alunos nos apresentando e, em seguida, discorrer sobre o PROMAT, seus objetivos, duração, conteúdos que serão abordados, calendário de encontros, certificados e tirar as dúvidas que eles possam ter sobre o seu funcionamento.

2- Dinâmica de apresentação com o novelo de lã (40 min)

Solicitaremos Após a fala sobre o PROMAT, pediremos para que os alunos nos ajudem a auxiliarem afastando as carteiras para os cantos, desse modo, teremos um espaço amplo no centro da sala. Em seguida pediremos aos alunos para formarem um círculo. Um estagiário iniciará a dinâmica, pegando o barbante, enrolando no dedo, se apresentando e jogando o rolo para um dos alunos. Nesse momento explicaremos que quem estiver com o rolo de barbante deve se apresentar dizendo o nome, idade, cidade onde mora, se trabalha ou não, o que pretende fazer após a conclusão do Ensino Médio, se pretende fazer algum curso do Ensino Superior e jogá-lo para outra pessoa que repetirá o processo até que todos da sala se apresentem. Para que os alunos compreendam melhor o processo da dinâmica, vamos jogar o novelo entre nós inicialmente, exemplificando a forma de apresentação. Quando chegar no último estagiário, será escolhido um aluno aleatório e assim seguirá a dinâmica até o último aluno.

Ao final teremos uma trama de fios, a qual será desfeita seguindo o processo contrário, ou seja, o último aluno irá falar as informações do seu antecessor enquanto enrola do barbante e entrega o novelo ao colega. Assim esse processo se seguirá até que a trama se desfaça e a primeira pessoa que se apresentou seja apresentada pelo colega.

Em seguida, vamos organizar a sala e dar a opção dos alunos de formarem duplas ou não. Após organizar a sala será passada uma lista para os alunos colocarem seus números de telefone, pois vamos criar um grupo no WhatsApp para enviar as aulas e os exercícios corrigidos. Nesse momento, vamos pegar o número de celular apenas dos alunos que aceitarem participar do grupo.

3- Introdução do conteúdo (15 min)

Iniciaremos a introdução do conteúdo relacionando a atividade anterior de forma que contribua na compreensão do que é a **análise combinatória** e qual a sua utilidade.

Na atividade anterior a pessoa que está com o novelo em mãos pode escolher qualquer outra pessoa para jogar. A quantidade das possibilidades varia de acordo com a quantidade de pessoas que temos no círculo. Por exemplo:

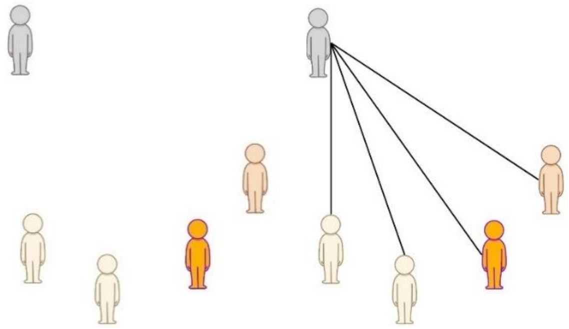
1- Vamos pensar nas possibilidades de quem pode jogar o novelo de lã. O novelo de lã começa com um dos nossos colegas. A Figura 1, a seguir, ilustra o colega que iniciará jogando o novelo.

Figura 1 – Passo 1: dinâmica do novelo

Fonte: Elaborado pelos autores por meio do *software* Canva

2- Do grupo de pessoas que temos, ele pode escolher qualquer outro membro do círculo para jogar o novelo.

Figura 2 – Passo 2: dinâmica do novelo

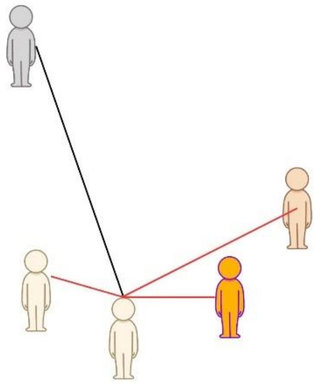


Fonte: Elaborado pelos autores por meio do *software* Canva

Na imagem acima, figura 2, quem está com o novelo possui quatro possibilidades de escolha. O boneco amarelo representa o sujeito escolhido para se jogar o novelo.

3- Quando o novelo é jogado, o que é possível perceber?

Figura 3 – Passo 3: dinâmica do novelo



Fonte: Elaborado pelos autores por meio do *software* Canva

Na imagem acima, Figura 3, quem está com o novelo possui três possibilidades de escolha.

A partir da discussão da dinâmica, falaremos que contar não é sempre um processo viável. Contar unidades uma a uma, que é o processo elementar, não é fácil em muitas situações, como por exemplo a própria dinâmica de apresentação, visto que há muitas possibilidades de jogar o novelo. Por isso é necessário estabelecer métodos de contagem que consigam resultados mais rápido. A obtenção de tais métodos é a preocupação básica da análise combinatória.

Em seguida, daremos início a explicação dos conteúdos, abordando o Princípio Fundamental da Contagem.

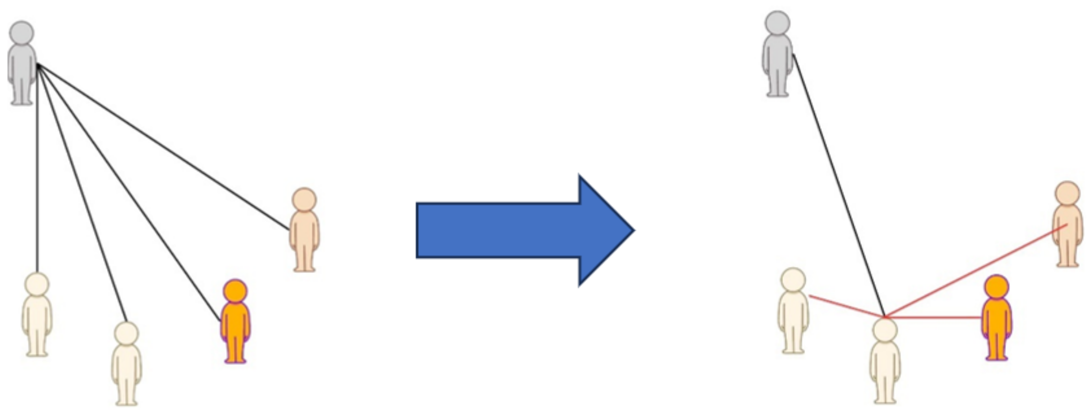
4- Princípio Fundamental da Contagem (35min)

Apresentaremos a definição do princípio fundamental da contagem da seguinte forma: possibilidades.

O princípio fundamental da contagem, também chamado de princípio multiplicativo, é utilizado para encontrar o número de possibilidades para um evento constituído de n etapas. Para isso, as etapas devem ser sucessivas e independentes.

Se a primeira etapa do evento possui x e a segunda etapa é constituída de y possibilidades, então existem $x.y$ possibilidades. Segue um exemplo na Figura 4.

Figura 4 – Passo 4: dinâmica do novelo



Fonte: Elaborado pelos autores por meio do software Canva

O primeiro colega possui quatro possibilidades de jogar o novelo. Após jogar o novelo, a próxima pessoa tem três possibilidades de jogar, sendo assim, existem 12 possibilidades diferentes ao total de se jogar o novelo. $4 \cdot 3$ possibilidades, resultando assim nas 12 possibilidades. Se continuassemos jogando o novelo, qual seria o total de possibilidades?

Portanto, o princípio fundamental da contagem é a multiplicação das opções dadas para determinar o total de possibilidades.

Temos também o diagrama de árvore, que é útil para analisar a estrutura de um problema e visualizar o número de combinações.

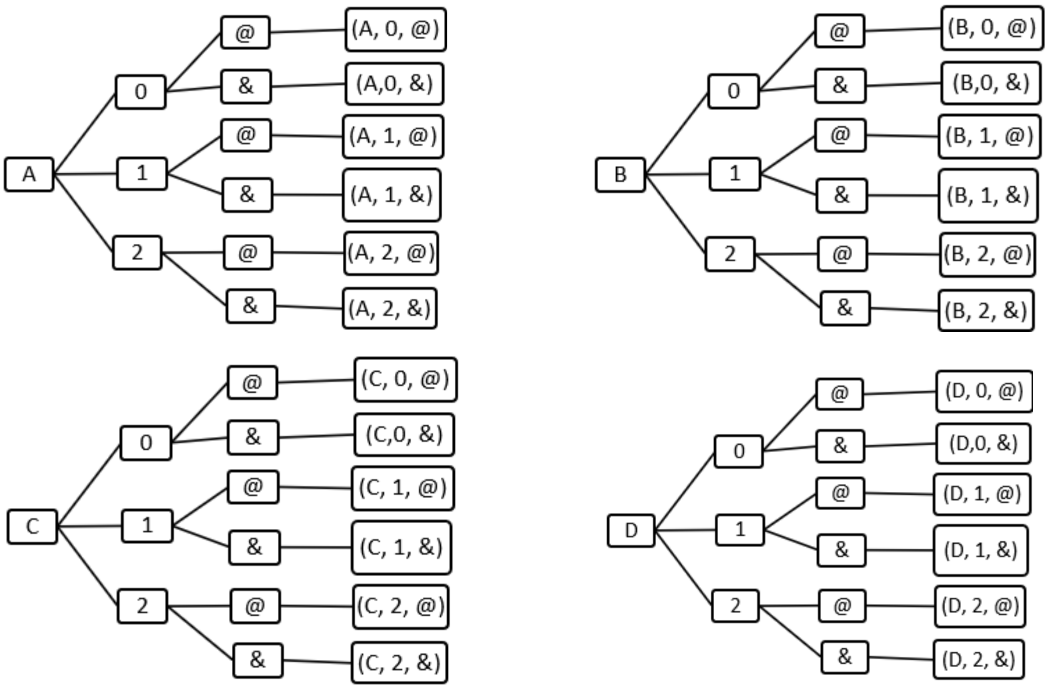
Para demonstrar como montar o diagrama de árvore utilizaremos o seguinte problema como exemplo:

Exemplo 1: A criação de uma senha

Ao ser contratado para trabalhar em uma empresa x, seu supervisor aconselhou a criar uma senha para proteger seu login de acesso. No sistema da empresa há uma recomendação de que a senha seja uma combinação entre letras (A, B, C, D), números (0, 1, 2) e caracteres (@, &). Qual é o número total de combinações que você pode utilizar para criar a sua senha?

Para resolver esse problema, faremos a contagem do número de maneiras possíveis construindo o diagrama de árvore.

Figura 5 – Diagrama de árvore: possibilidades de senhas



Fonte: Produção dos autores

A partir do diagrama podemos observar que há 24 possibilidades de escolha, mas era possível chegar a esse número a partir da simples multiplicação entre o número de opções de cada uma das escolhas que devem ser feitas:

4 opções de letras;

3 opções de números;

2 opções de caracteres.

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

Exemplo 2: Dinâmica com as cadeiras (2, 3 e 4 cadeiras)

O intuito da atividade é identificar de quantas maneiras distintas os quatro alunos podem ser dispostos. Inicialmente, com duas cadeiras, depois três cadeiras e, por fim, quatro cadeiras. Por exemplo:

Marcos e Ana se voluntariam para realizar as permutações com isso temos que:

- Se Marcos se sentar na primeira cadeira, o único lugar que resta para Ana ficar é se sentar na segunda cadeira.
- Caso a Ana sente-se na primeira cadeira, Marcos se sentará na segunda e desta forma não termos mais combinações possíveis.

Logo, observamos que temos apenas duas possibilidades de permutar esses alunos.

Assim que for entendido o funcionamento da dinâmica, acrescentaremos mais uma cadeira. Supondo que agora temos Marcos, Ana e Carla como voluntários, teremos as seguintes disposições:

- Se Marcos sentar-se na primeira cadeira, vemos que eles ficaram ordenados das seguintes formas: MAP e MPA;
- Se Ana for a primeira, teremos as seguintes combinações: AMP e APM;
- E por fim, caso a Carla sente-se primeiro, temos que: CMP e CPA.

Desta forma, notamos que existem seis possíveis possibilidades a serem realizadas quando temos três alunos envolvidos.

Assim que finalizada esta etapa, temos uma última pergunta, e se colocar mais uma cadeira? Quantas possibilidades a mais teremos? Ou será que conseguimos notar um padrão? Dito isso:

Supomos que: Marcos, Paulo, Carla e Ana se voluntariam para realizar as permutações, com isso temos que:

- Se Marcos ficar em primeiro lugar à esquerda temos as seguintes possibilidades: MPCA, MPAC, MCPA, MCAP, MAPC e MACP;

- Se caso Paulo ficasse em primeiro lugar, teremos as seguintes possibilidades: PMCA, PMAC, PAMC, PACM, PCAM e PCMA;
- Se neste caso fosse a Carla a se sentar no primeiro lugar à esquerda: CPMA, CPAM, CMAP, CMPA, CAPM e CAMP;
- Por fim, caso a Ana tenha escolhido ficar em primeiro, teremos as seguintes permutações: ACMP, ACPM, AMPC, AMCP, APMC e APCM;

Dessa maneira, conseguimos concluir que existem $4 \times 6 = 24$ possibilidades distintas dos quatro alunos se disporem nas cadeiras.

Conseguimos perceber que quando dispomos qualquer um dos quatro alunos a se sentar na primeira cadeira, na segunda cadeira restarem três a se sentarem, já que um dos estudantes já ocupa a primeira cadeira, também não tem a possibilidade de um aluno sentar-se em dois lugares diferentes ao mesmo tempo. Na terceira cadeira restam dois alunos para se sentar e por fim, na quarta e última cadeira resta apenas uma.

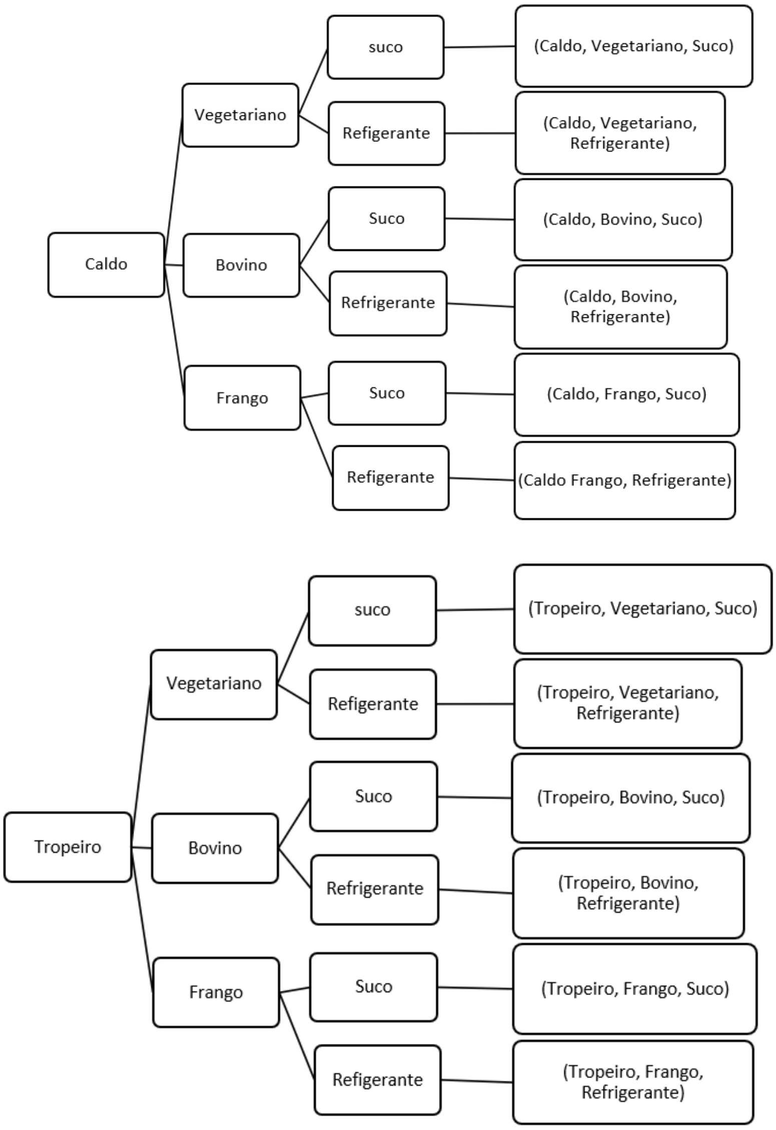
Com isso, notamos que: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ configurações diferentes.

Exercício (entregar para os alunos):

Em um restaurante, é oferecido o famoso prato feito. Todos os pratos possuem arroz, e o cliente pode escolher uma combinação entre três possibilidades de carne (bovina, de frango ou vegetariana), dois tipos de feijão (caldo ou tropeiro) e dois tipos de bebida (suco ou refrigerante). De quantas maneiras distintas um cliente pode fazer o pedido?

Faremos a contagem do número de maneiras construindo no quadro o diagrama de árvore que mostra as diferentes possibilidades de se montar o prato nesse restaurante. A Figura 6 mostra o diagrama

Figura 6 – Diagrama de árvore: exercício do restaurante



Fonte: Produção dos autores

A partir do diagrama podemos observar que há 12 possibilidades de escolha, mas era possível chegar a esse número a partir da simples multiplicação entre o número de opções de cada uma das escolhas a serem feitas:

2 opções de feijão;

3 opções de carne;

2 opções de bebida.

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

(Intervalo)

5- Fatorial "!" (20 min):

Primeiramente vamos realizar a dinâmica das cadeiras, ela funcionará da seguinte maneira:

Em seguida explicaremos que fatorial só faz sentido quando estamos trabalhamos com números naturais, utilizado para facilitar o cálculo de arranjos, permutações, combinações, entre outros problemas. Na matemática o número seguido pelo símbolo de exclamação "!", é chamado de fatorial. n! (n fatorial) é a multiplicação de **n** por todos os seus antecessores.

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Exemplos:

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120 \qquad 3! = 3.2.1 = 6$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24 \qquad 0! = 1$$

Quando vamos fazer adição, subtração e multiplicação de fatoriais, é necessário calcular cada um separadamente, apenas na divisão possui uma forma específica para a realização de simplificação.

Exemplos:

$$5! + 3! = (5.4.3.2.1) + (3.2.1.) = 120 + 6 = 126$$

$$6! - 4! = (6.5.4.3.2.1) - (4.3.2.1) = 720 - 24 = 696$$

$$3!\,.\,2! = (3.2.1)\,.\,(2.1) = 6.2 = 12$$

Para a Divisão de Fatorial é feita a simplificação, seguindo alguns passos. A explicação será feita realizando um exemplo:

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.5!}{5!} = 7.6 = 42.$$

Exercício (entregar para os alunos):

(Enem 2014): Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo oito filmes de ação, cinco de comédia e três de drama, e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e

um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.
De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \times 8! + (3!)^2$
b) $8! \times 5! \times 3!$
c) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$
d) $\frac{16!}{28}$

Solução:
O número de maneiras distintas que ele pode escolher o filme de ação é dado por $8!$, pois há 8 filmes. O mesmo ocorre com os filmes de comédia e drama. Como são 5 filmes de comédia, a quantidade de maneiras que ele pode escolher é $5!$, e os filmes de drama é dado por $3!$.
Desse modo, há $8! \times 5! \times 3!$ a maneiras distintas de escolher os filmes.

6- Permutação Simples (20 min):

Permutação significa mudar ou trocar. Nos problemas de contagem quando estamos nos referindo as permutações devemos associá-la à noção de embaralhar, ou seja, trocar objetos de posição. Com as permutações conseguimos identificar quantos agrupamentos é possível formar quando temos n elementos, em que todos esses elementos serão utilizados em cada agrupamento.

Explorando as permutações simples:

Será realizado uma atividade referente ao conteúdo que está sendo lecionado, neste caso permutação, em que será relembrado a dinâmica das cadeiras, e em seguida será questionado aos alunos de quantas formas conseguiríamos permutar se tivéssemos uma fila com oito aluno, doze alunos e vinte alunos.

Formalizando as permutações simples:

Geralmente, quando pensamos em permutações, a pergunta refletimos é: de quantas maneiras diferentes podemos organizar em fila n objetos distintos escolhidos entre n objetos? Desta forma, podemos escolher o primeiro elemento da fila de n maneiras. Contudo, de quantas maneiras diferentes podemos escolher o segundo elemento da fila, sabendo que, já escolhemos um dos n-elementos? Neste caso seria, n-1 maneiras diferentes de se escolher. Dando sequência dessa forma e utilizando do princípio fundamental da contagem, fica evidente que o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses n elementos é dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Considerando n elementos diferentes, os agrupamentos ordenados formados por esses n elementos recebem o nome de **permutações simples**, quando não há repetição de elementos. Indicamos por $P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

7- Arranjo Simples (35 min):

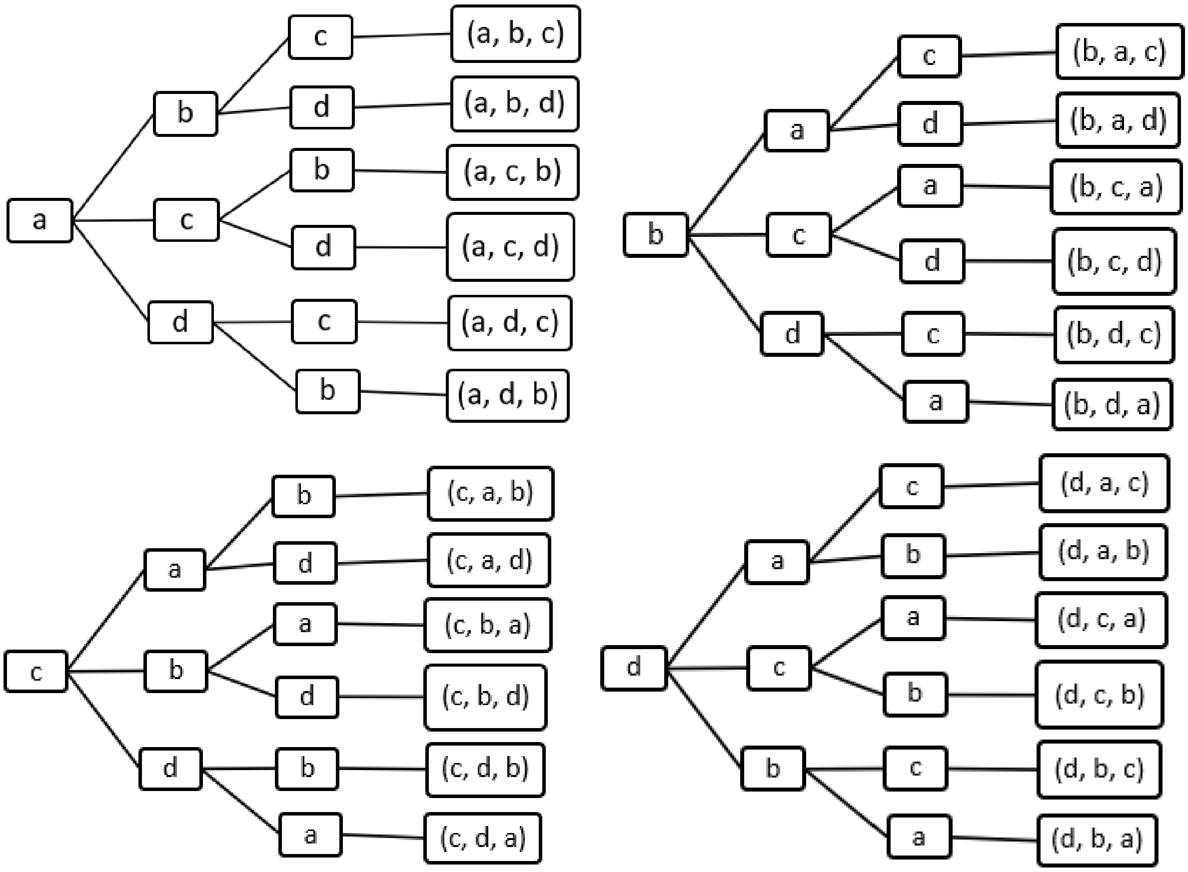
Para introduzir a noção de arranjo simples, os alunos serão instigados a tentarem resolver o seguinte problema:

a) Dado um conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, forme todas as sequências possíveis com 3 elementos distintos.

Solução:

Construindo o diagrama de árvore é possível chegarmos ao resultado das sequências possíveis.

Figura 7 – Diagrama de árvores: arranjo simples



Fonte: Produção dos autores

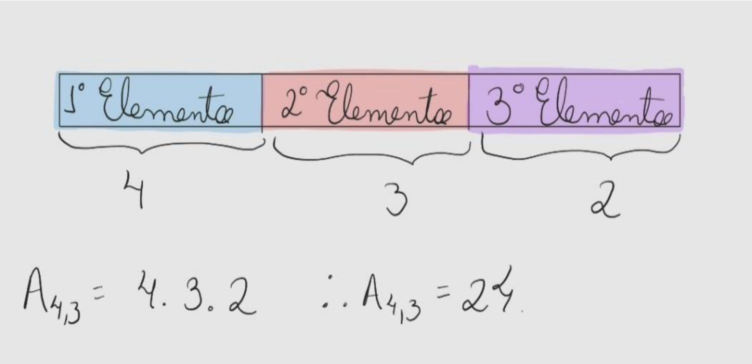
Sendo assim, é possível formar 24 sequências distintas. Essas sequências são chamadas de "arranjos simples dos quatros elementos de I tomados três a três". Isto é, um arranjo simples de três elementos de I é qualquer sequência formada por três elementos distintos de I. Observe que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam pela ordem dos elementos ou pela natureza dos elementos que os compõem.

Por exemplo:

$(a, b, c) \neq (b, c, a)$ – Diferem pela ordem dos elementos

$(a, b, c) \neq (a, b, d)$ – Diferem pela natureza dos elementos

Figura 8 – Exemplo de arranjo simples



Fonte: Produção dos autores

O número de arranjos simples de quatro elementos distintos tomados três a três é indicado pelo símbolo $A_{4,3}$ e pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Com os quatros elementos de I devemos formar sequencias de 3 elementos, sem repetição:

Definição de arranjo simples: Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e p um número natural tal que $p \leq n$. Chama-se arranjo simples de p elementos de I toda sequência formada por p elementos distintos de I.

Cálculo do número de arranjos simples

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemplos (entregar para os alunos):

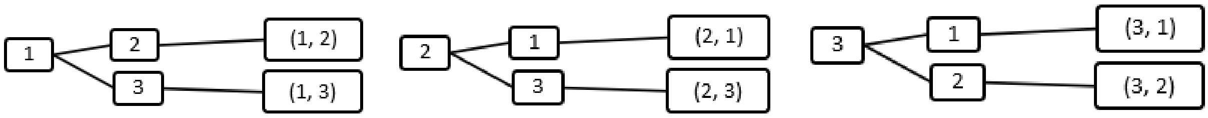
1- Quantos números de 2 dígitos distintos podemos formar nos quais seus dígitos são tomados do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Solução:

Podemos resolver esse problema através do Princípio Fundamental da Contagem e com a fórmula.

Utilizando o Princípio Fundamental do Cálculo, podemos resolver da seguinte maneira:

Figura 9 – Diagrama de árvore: princípio fundamental da contagem



Fonte: Produção dos autores

A fórmula nos permite verificar se foi obtido o mesmo resultado:

$$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!}$$

$$A_{3,2} = \frac{3 \times 2 \times 1!}{1!} = 3 \times 2 = 6$$

Portanto podemos concluir que das duas maneiras é possível obter o mesmo resultado.

2- Calcule o valor de $A_{12,4}$.

Solução:

$$A_{12,4} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!}$$

$$A_{7,3} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$$

8- Combinação Simples (25 min)

Para introduzir o tópico de combinação simples, vamos pensar em um conjunto: $I = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, vamos pedir que os alunos apontem quais são os subconjuntos de I com três elementos.

Resposta: $\{a,\ b,\ c\}$; $\{a,\ b,\ d\}$; $\{a,\ c,\ b\}\ e\ \{b,\ c,\ d\}$

Explicaremos então que tais subconjuntos são chamados de “combinações simples dos quatro elementos de I tomados três a três”. Ou seja, uma combinação simples de três elementos de I é qualquer subconjunto de I formado por três elementos. Por exemplo:

- $\{a,\ b,\ c\} \neq \{a,\ b,\ d\}$ diferem pela natureza dos elementos.
- $\{b,\ c,\ d\} = \{c,\ b,\ d\}$ a ordem dos elementos não altera o conjunto.

Definição: Seja $I = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p. Seja $I = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural tal que $p \leq n$. Chama-se **combinação simples de p elementos de I** todo subconjunto de I formado por p elementos. um número natural tal que $p \leq n$. Chama-se **combinação simples de p elementos de I** todo subconjunto de I formado por p elementos.

Cálculo do número de combinações simples de n elementos distintos tomados p a p: Para efetuar esse cálculo vamos relacionar o número de combinações simples com o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p .

Voltemos às combinações simples dos elementos de $I = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ tomados três a três: $\{a,\ b,\ c\}$; $\{a,\ b,\ d\}$; $\{a,\ c,\ d\}\ e\ \{b,\ c,\ d\}$. Indicado por $C_{4,\,3}$ o número de combinações simples de 4 elementos tomados três a três, temos $C_{4,\,3} = 4$. Cada uma dessas combinações gera $3!$ arranjos simples dos quatro elementos $a,\ b,\ c,\ d$ tomados três a três.

Assim, multiplicando por 3! o número $C_{4,\,3}$, obtém-se o número $A_{4,\,3}$, isto é:$C_{4,\,3} \cdot 3! = A_{4,\,3}$.

Fórmula para o cálculo do número de combinações simples:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemplo:

1) Calcular $C_{6,\,4}$.

Solução:

$$C_{6,\,4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = \frac{30}{2} = 15$$

Critério para diferenciar Arranjo de Combinação:

Quando tentamos resolver um problema de análise combinatória, deparamo-nos com a seguinte questão: os agrupamentos mencionados no problema são arranjos ou combinações? Para eliminar essa dúvida, vamos agir da seguinte maneira: construímos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema e, a seguir, mudamos a ordem de apresentação dos elementos desse agrupamento.

- Se com a mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **diferente** do original então esse agrupamento será um **arranjo**.
- Se com essa mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **igual** ao original, então esse agrupamento será uma **combinação**.

Música: Arranjo ou combinação

https://youtu.be/tNQheiEHXO4?si=O59lU5GHRkzL7Y_4

Exemplos:

1) Uma comissão de três membros deve ser escolhida entre sete pessoas. De quantos modos diferentes pode-se escolher a comissão, sabendo-se que as pessoas que formarem a comissão terão funções idênticas?

   Solução:

   Como a ordem dos elementos componentes não altera a comissão, temos que cada comissão é uma combinação. Logo, o número de combinações é:

$$\mathrm{C}_{7,\,3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{210}{6} = 35$$

2) Dispomos de 7 cores e queremos pintar as 5 regiões brasileiras em um mapa do Brasil, cada uma de uma cor. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Solução:

Como a mudança na ordem dos elementos importa, pois provoca agrupamentos diferentes, temos um arranjo. Logo, o número de maneiras é:

$$\mathrm{A}_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2520 \text{ maneiras}$$

9- Lista de casa (entregar para os alunos)

1- Considerando um grupo de 20 pessoas que participam de um conselho consultor de uma empresa, calcule o número de maneiras de escolher um presidente, um vice-presidente e um diretor para o conselho.

Solução:

$$A_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!}$$

$$= \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!}$$

$$A_{20,3} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

2- (Enem 2022) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1 000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, qual a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes?

Solução:

Há 7 opções de modelos e 2 de motores.

Em relação os opcionais: bancos de couro, rodas de liga e central multimídia é possível escolher os três, dois, um e nenhum.

- Bancos de couro, rodas de liga e central multimídia;

- Bancos de couro e central multimídia;
- Bancos de couro e rodas de liga;
- Rodas de liga e central multimídia;
- Bancos de couro;
- Rodas de liga;
- Central multimídia;
- Nenhum.

Assim, em relação aos opcionais, há 8 escolhas possíveis.

Aplicando o princípio fundamental da contagem e considerando o número de cores como x, temos:

$$7 \bullet 2 \bullet 8 \bullet x > 1000$$

$$112x > 1000$$

$$x > \frac{1000}{112}$$

$$x > 8{,}9$$

3- Uma pessoa tem uma caixa com 10 livros guardados e possui uma prateleira onde cabem apenas 4 deles. De quantos modos ela pode escolher 4 dos 10 livros e colocá-los em uma pilha sobre a prateleira?

Solução:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$$

$$A_{10,4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

4- (Enem 2019) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão. Qual a quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir?

Solução:

Tanto para a primeira, segunda, terceira e quarta chave há duas opções. Utilizando o princípio fundamental da contagem, temos:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

5- Considere a palavra "PORTA" e calcule:

a) Todos os seus anagramas.

Solução: Como não se trata de um anagrama com repetição, temos que:

$$P_5 = 5! \; = \; 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

b) Seus anagramas que iniciam por "A".

Solução: Pelo princípio da prioridade, observamos que:

$$1 \times P_4 = 1 \times 4! = 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

c) Seus anagramas que terminam em vogal.

Solução: Conhecendo que as vogais são {O, A}, obtemos o seguinte resultado:

$$P_4 \times 2 = 4! \times 2 = 24 \times 2 = 48$$

6- **(IFSul-RS)** O texto "Só o ensino superior salva", contido na prova de português deste caderno de provas, fala dentre outras coisas, sobre o ensino público.

Afirma-se que o número de anagramas formados com a palavra PÚBLICO que comece e termine por consoante é de?

Solução:

Como a palavra "PÚBLICO" tem quatro consoantes e os anagramas devem começar e terminar com uma, pelo princípio da prioridade, começas pela escolha da primeira letra, com quatro possibilidades, e da última, com três.

Para as cinco letras centrais, como não há qualquer orientação, temos P_5.

Portanto:

$$4 \times P_5 \times 3 \ = \ 12 \times 5! \ = \ 12 \times 120 \ = \ 1440.$$

7- Durante os experimentos sobre genética, Mendel precisou escolher 3 mudas diferentes de ervilha para serem cobaias do mesmo experimento. Sabendo que ele tinha disponível 10 mudas naquele dia, então o número de maneiras distintas que ele poderia escolher as cobaias é igual a:

Solução:

Como a ordem não importa, temos uma combinação:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}$$

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,7!}$$

$$C_{10,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3!\,7!}$$

$$C_{10,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_{10,3} = 120$$

8- (Enem) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

Solução:

Calcularemos todas as duplas possíveis e depois vamos subtrair todas as duplas em que ambos são canhotos.

As duplas possíveis são uma combinação de 10 elementos tomados de 2 em 2, e as duplas em que ambos são canhotos são uma combinação de 4 elementos tomados de 2 em 2, logo, temos que:

$$C_{10,2} - C_{4,2} = \frac{10!}{2!\,8!} - \frac{4!}{2!\,2!}$$

$$C_{10,2} - C_{4,2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$$

$$C_{10,2} - C_{4,2} = 45 - 6$$

$$C_{10,2} - C_{4,2} = 39$$

Avaliação: A avaliação se desenvolverá no decorrer das aulas por meio de exercícios que vamos entregar para os alunos, recolher, corrigir e já dar uma devolutiva sobre a resolução.

REFERÊNCIAS

BENEVIDES, Fabrício Siqueira. **Material Teórico- Módulo de Princípios Básicos de Contagem**: arranjos e combinações simples. Arranjos e Combinações Simples. 2016. Revisor: Antonio Caminha M. Neto. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=15&tipo=7. Acesso em: 01 ago. 2024.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernanda. **Matemática em contextos**: análise combinatória, probabilidade e computação. São Paulo: Editora Ática, 2020. 159 p.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Fatorial**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/fatorial.htm. Acesso em: 26 jul. 2024.

OLIVEIRA, Ricardo Tavares de. **PREPARA MATEMÁTICA**: livro do professor. São Paulo: Editora Ftd, 2023. 384 p.

PAIVA, Manoel. Os princípios da análise combinatória. In: PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2005. Cap. 22. p. 342-348.

PAIVA, Manoel. Agrupamentos e métodos de contagem. In: PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2005. Cap. 23. p. 354-367.

PRADO, Etelviane Pereira Souza do. **Plano de Aula e/ou Roteiro de Atividades**. Disponível em: https://sites.unipampa.edu.br/pibid/files/2022/03/plano-de-aula-10-introducao-ao-principio-da-contagem.pdf. Acesso em: 26 jul. 2024.

Relatório Promat aula 1 – (24/08/2024)

No dia 24 de agosto de 2024, foi realizado o primeiro encontro do PROMAT, contando com a presença de 23 alunos. Antes do início da aula um aluno pediu se poderia trocar de turma, pois seus amigos estavam em outra sala, uma professora orientadora que estava presente disse que verificaria a situação. Enquanto os alunos iam chegando, antes do início da aula, jogamos forca juntamente com eles, gerando um momento de interação e diversão para que se sentissem mais à vontade.

No primeiro momento, fizemos a apresentação do programa, passando informações sobre as datas das aulas, conteúdo a serem trabalhados, certificação, entre outras. Na sequência, solicitamos que os estudantes nos ajudassem a organizar a sala, de forma que ficasse um espaço no centro para formar um círculo para a realização da dinâmica de apresentação. Durante a dinâmica houve uma boa interação. Pedimos que cada um falasse algumas características sobre si. A maioria trouxe informações como nome, idade, série em que estuda e graduação que pretende cursar. Porém, alguns alunos se restringiram a dizer apenas o seu nome. Na segunda parte da dinâmica, os alunos deveriam mencionar características que lembrassem sobre o colega que se apresentou antes deles. Esse foi um momento de bastante descontração, pois muitos não se lembraram de nada sobre o outro e tentaram adivinhar algumas características, o que promoveu uma interação divertida.

Após a dinâmica foi entregue um bombom para cada aluno, organizamos a sala com o auxílio dos estudantes, iniciando com o questionamento se eles saberiam dizer de quantas formas diferentes poderíamos ter jogado o novelo. Os alunos deram palpites e juntos chegamos na resposta. Explicamos sobre o Princípio Fundamental da Contagem, e para melhor entendimento realizamos uma dinâmica verificando de quantas formas diferentes poderíamos organizar dois alunos em duas cadeiras e depois três alunos em três cadeiras. 3 alunos se voluntariaram para participar dessa atividade, e o restante da turma participou na discussão para verificar as possibilidades.

Entregamos um exercício impresso para verificar se os alunos conseguiram compreender esse conceito e todos o resolveram de forma correta, após isso os alunos foram dispensados para o intervalo. Durante essas explicações passamos uma lista de chamada, na qual solicitamos que os estudantes indicassem seu número de telefone, caso quisessem para criássemos um grupo da turma no WhatsApp.

Ao retornar para a sala, exploramos o conceito de fatorial. Durante as explicações os alunos se mostraram bem participativos, fazendo questionamentos e contribuindo para a formalização da definição. Os alunos construíram a formalização da definição do fatorial por meio dos exercícios e explicações feitas na lousa. Comentaram que para realizar a construção do fatorial tinham que multiplicar pelos números anteriores, como já estávamos fazendo nos conceitos apresentados anteriormente.

Passamos a eles um exercício do ENEM, envolvendo o conceito de fatorial, para ser resolvido durante a aula. Vários alunos apresentaram dúvidas enquanto resolviam e solicitaram nossa ajuda. Ainda assim, a grande maioria conseguiu resolver corretamente.

Na sequência, apresentamos a definição de permutação simples, relacionando-a com fatorial e com a dinâmica das cadeiras realizada no começo da aula. Explicamos que ao verificar os agrupamentos de alunos possíveis estávamos fazendo permutações. Pedimos se eles conseguiriam identificar quantas possibilidades teríamos para organizar todos os alunos presentes em uma fileira e eles conseguiram apontar que teria 23! possibilidades.

Por fim, realizamos as explicações em torno de arranjo simples e combinação simples, diferenciando esses dois conceitos por meio dos exercícios realizados. Utilizamos uma música que ajuda a entender melhor quando um problema se trata de combinação e quando se trata de arranjo. Os alunos se mostraram bem participativos e cantaram a música junto conosco. Propomos dois exercícios, um sobre cada um desses temas para os alunos identificarem se tratava de arranjo ou combinação e encontrar a solução, alguns se confundiram, e ajudamos na compreensão a partir de uma discussão junto a eles.

Ao fim da aula verificamos novamente a presença dos estudantes, e em seguida nos despedimos deles, motivando-os a retornarem no próximo encontro.

2.2 AULA 02 (31/08/2024) – PLANO DE AULA E RELATÓRIO

PLANO DE AULA 2 – (31/08/2024)

Fabrício Adriél Rustick
Maíri Poeta Castilho da Silva
Michelli Neves Lavagnoli
Milleni Ferreira de Souza

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio
Tempo de execução: 4 horas-aula
Conteúdo: Probabilidade e Estatística

Objetivo Geral: Apresentar conceitos básicos de Probabilidade e Estatística de forma dinâmica, relembrar o que já foi ensinado na escola, trabalhar com o cálculo mental e propor questões que possam ser solucionadas com probabilidade, média, mediana e moda.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com probabilidade e estatística, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- reconhecer situações relacionadas com o conteúdo de probabilidade;
- identificar as propriedades de probabilidade e reconhecer o conceito de espaço amostral, experimentos aleatórios e eventos;
- diferenciar Média, Mediana e Moda;
- conhecer e aplicar as Medidas de Dispersão.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, computador, roleta de papelão, lápis, caderno, caneta, borracha, retroprojetor, slides, folha sulfite e baralho.

Encaminhamento metodológico:

1- Correção da lista de Exercícios (20 min)

Vamos separar aproximadamente 20 minutos no início da aula para realizar a correção dos exercícios que ficaram como tarefa de casa.

2- Experimento aleatório, espaço amostral, tipos de variáveis e eventos (40 min)

Definições:

Experimento aleatório: É chamado de experimento aleatório os fenômenos que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes. Como exemplo temos o lançamento de um dado ou de uma moeda. O conjunto de possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado de espaço amostral.

Exemplo de Experimento aleatório:

Lançar uma moeda e observar a face de cima.

Exemplo de espaço amostral:
S= {K, C}, onde K representa cara e C coroa.

Dinâmica da ov':

O jogo atualmente visto nas redes sociais consiste em um jogo de aposta do qual o jogador anseia por uma combinação de três figuras iguais que estejam na mesma linha horizontal, desta forma ao atingir tal feito o jogador ganha uma certa quantia, referente a aposta realizada.

Partindo disto, a dinâmica da ov' irá funcionar da seguinte maneira:

Vamos levar uma roleta de papelão para que seja realizado uma simulação do jogo da ov' e não será realizado nenhum tipo de aposta. No primeiro momento a intenção é que os alunos rodem a roleta para definir o espaço amostral; cada um irá rolar a roleta três vezes e anotar quais foram as imagens que saíram. (Se algum aluno conseguir tirar as 3 imagens, ele ganhará um doce como prêmio)

Em um segundo momento após falarmos sobre o cálculo de probabilidade os alunos deverão utilizar as anotações para calcular a probabilidade de cair as combinações que eles obtiveram durante o jogo.

Tipos de variáveis

A variável é a característica que é medida em cada elemento da amostral ou população, é chamada de variável pois seus valores variam de elemento para o outro elemento. As variáveis podem ter valores não numéricos ou numéricos.
Podem ser classificadas como:

Variáveis Quantitativas: São características que apresentam valores numéricos que fazem sentido, sendo ela discretas ou contínuas.

a) **Variáveis discretas:** Pode assumir apenas um número infinito ou finito contável de valores, assim, somente fazendo sentido para valores inteiros. Exemplos: número de filhos, bactérias por litro de leite, entre outros.

b) **Variáveis contínuas:** Assumem valores em uma escala continua, então os valores fracionais fazem sentido. Usualmente devem ser medidas através de algum instrumento. Exemplos: peso (balança), altura (régua), tempo (relógio), idade, distância.

Variáveis Qualitativas: Não possuem valores quantitativos e são definidas por diversas categorias, ou seja, representam uma classificação dos indivíduos. Sendo elas, nominais ou ordinais.

a) **Variáveis nominais:** Não existe ordem dentre as categorias. Exemplos: sexo, cor dos olhos, cor dos cabelos, doente/sadio.
b) **Variáveis ordinais:** Existe ordem entre as categorias. Exemplos: estágio da doença (inicial, intermediário, terminal), mês de observação (janeiro, fevereiro, ..., dezembro), escolaridade (1º,2º,3º grau).

Eventos: Um evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Ele pode conter nenhum elemento (conjunto vazio) ou todos os elementos de um espaço amostral. O número de elementos do evento é representado da seguinte maneira: n(E), sendo E o evento em questão.

3- Cálculo de Probabilidade (40 min)

Definição: Seja E um espaço amostral equiprovável, finito e não-vazio, e A um evento de E. A probabilidade de ocorrer algum elemento de A é indicada por $P(A)$ e definida por:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(E)}}$$

Em que $n(A)$ e $n(E)$ indicam, respectivamente, os números de elementos de A e de E.

Exemplos:

1- No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de se obter a face cara?

Solução: Indicamos por C (cara) e por K (coroa) as faces da moeda.

O espaço amostral é: $E = \{C, K\}, n(E) = 2$.

O evento que queremos é: $A = \{C\},\ n(A) = 1$.

Logo P(A) = $\frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{2}$ = 0,5 ou 50%.

2- No lançamento de duas moedas, qual é a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, pelo menos uma cara?

Solução:

O espaço amostral é: $E = \{(C,C),(C,K),(K,C),(K,K),\}, n(E) = 4$.

O evento que queremos é: $C = \{(C,C),(C,K),(K,C)\}, n(A) = 3$.

Logo $P(C) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{3}{4}$ = 0,75 ou 75%.

Propriedades das probabilidades:

Sendo E um espaço amostral equiprovável, finito e não-vazio, e A um evento de E, têm-se:

(P.1) $P(\emptyset) = 0$

Justificativa: $P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(E)} = \frac{0}{n(E)} = 0$. O evento $\emptyset$ é chamado de evento impossível.

(P.2) $P(E) = 1$

Justificativa: $P(\emptyset) = \frac{n(E)}{n(E)} = 1$. O evento E, que coincide com o próprio espaço amostral, é chamado de evento certo.

(P.3) $0 \leq P(A) \leq 1$

Justificativa: $\emptyset \subset A \subset E \Rightarrow n(\emptyset) \leq n(A) \leq n(E) \Rightarrow \frac{n(\emptyset)}{n(E)} \leq \frac{n(A)}{n(E)} \leq \frac{n(E)}{n(E)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$.

(P.4) Sendo $\bar{A}$ o conjunto dos elementos de E que não pertencem a A, tem-se: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Justificativa: Como $A \cup \bar{A} = E$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$, tem-se:

$$n(A) + n(\bar{A}) = n(E) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\bar{A})}{n(E)} = \frac{n(E)}{n(E)} \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

O evento $\bar{A}$ é chamado de complementar de A. Se o evento A é determinado por uma propriedade p, então $\bar{A}$ é determinado pela propriedade $\sim p$ ($não\ p$), isto é, a negação de p. Por exemplo, no espaço amostral E formado por todos os números naturais, temos:

$$se\ A = \{x \in \mathbb{N} |\ x\ é\ múltiplo\ de\ 5\}, \qquad então: \bar{A} = \{y\ \in\ \mathbb{N} |\ y\ não\ é\ múltiplo\ de\ 5\}$$

(Propriedade p) (Propriedade $\sim p$)

Exemplo da (P.4):

1- Uma urna contém bolas coloridas. Retirando-se uma bola dessa urna, a probabilidade de se obter uma bola vermelha é $0{,}64$. Qual é a probabilidade de se obter uma bola que não é vermelha?

Solução: Indicado por A o evento formado pelas bolas vermelhas, o complementar de A é o evento $\bar{A}$ formado pelas bolas não vermelhas. Sabemos que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Logo: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.

Adição de probabilidades: Sejam A e B eventos de um espaço amostral E equiprovável, finito e não-vazio. A probabilidade de ocorrer um elemento de A ou um elemento de B, indicado por $P(A \cup B)$, é:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(E)}$$

Justificativa: Como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, temos:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(E)} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Essa identidade é conhecida como teorema da adição de probabilidades. O teorema é aplicado na resolução de problemas que pedem a probabilidade de ocorrer um evento A ou um evento B, pois o conectivo ou indica a união dos eventos

Eventos mutuamente exclusivos: Os eventos A e B são chamados mutualmente exclusivos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo:

1- Uma urna contém cinco bolas vermelhas, três bolas azuis e quatro bolas brancas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de sair uma bola vermelha ou uma bola azul?

Solução: $E = \{x | x \text{ é } a\ bola\ da\ urna\}, n(E) = 12$.

Consideremos dois eventos:

$$A = \{y \in E | y \text{ é } bola\ vermelha\}, n(A) = 5$$

$$B = \{z \in E | z \text{ é } bola\ azul\}, n(B) = 3$$

Observe que A e B são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \emptyset$.

Logo, temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

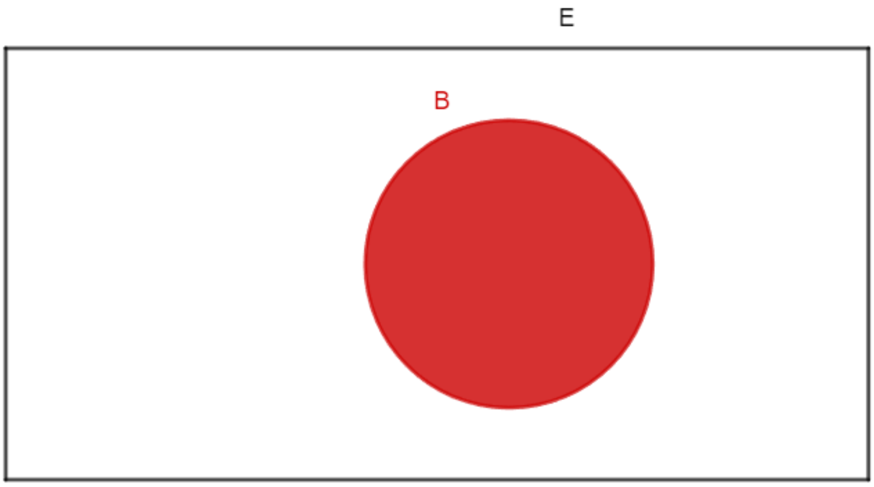
Nesse momento iremos pedir para que os alunos calculem a probabilidade de cair as imagens que eles obtiveram na dinâmica da ov'.

4- Probabilidade condicional (20 min)

Quando é preciso analisar a probabilidade de ocorrência de um evento, dado que outro evento já tenha ocorrido, temos um caso chamado probabilidade condicional. Nesse caso, há uma restrição ou um condicionamento do espaço amostral. Dados A e B dois eventos. A probabilidade de A ocorrer, sabendo que B já ocorreu, é representada por $P(A/B)$.

Ao analisarmos essa situação por meio de uma representação em forma de conjunto, percebemos que, se anteriormente tínhamos um espaço amostral (E) completo, ao condicionarmos o espaço amostral para a ocorrência de B, passamos a ter a seguinte redução:

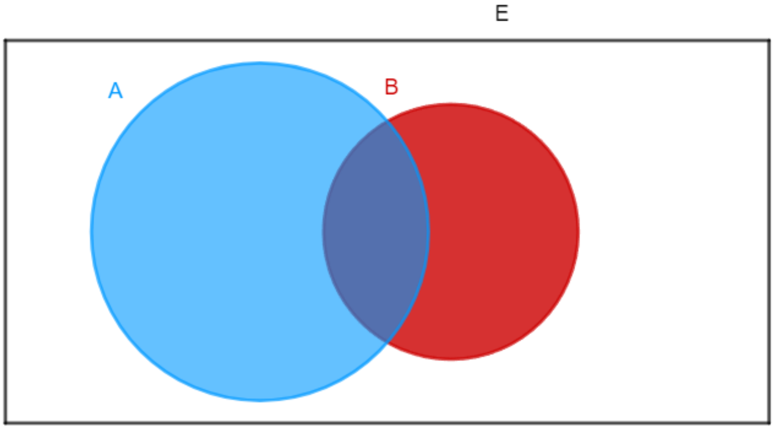
Figura 10 – Representação do espaço amostral a partir do conjunto



Fonte: Produção dos autores

Dado que A também estava contido em (E) e não estava contido em B, ao analisar um evento de A dado que B já ocorreu, passamos a ter a seguinte representação:

Figura 11 – Representação do espaço amostral a partir de dois conjuntos



Fonte: Produção dos autores

Desta forma, temos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

4.1 - Teorema da multiplicação de probabilidades (5min)

Considerando dois eventos que pertencem ao mesmo espaço amostral, a partir da probabilidade condicional, é possível mostrar que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$$

Com isso, a probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente é a probabilidade de ocorrer B multiplicada pela probabilidade de ocorrer A, dado que B tenha ocorrido.

4.2 - Probabilidade total e eventos independentes (5min)

Quando existem eventos A, B, C, ... independentes em um mesmo espaço amostral, é possível mostrar que:

$$P(A) + P(B) + P(C) + \cdots = 1$$

Exemplo:

(UEG-GO) Uma urna possui 5 bolas verdes e 4 amarelas. São retiradas duas bolas aleatoriamente e sem reposição. A probabilidade de ter saído bolas de cores diferentes é?

Solução: Inicialmente, precisamos separar o problema em duas partes: a primeira bola ser verde ou a primeira ser amarela.

<u>Caso a primeira seja verde:</u> A probabilidade é de cinco em nove e, depois de quatro em oito, para a segunda amarela:

$$P_1 = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

<u>Caso a primeira seja amarela:</u> A probabilidade é de quatro em nove e, depois, cinco em oito, para a segunda ser verde:

$$P_2 = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{9} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{18}$$

Portanto, $P = P_1 + P_2$, logo:

$$\frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

5- Medidas de Tendências Centrais (Moda, Média e Mediana) (15 min)

Explicaremos que em uma amostra, quando se têm os valores de uma certa característica, é fácil constatar que os dados normalmente não se distribuem uniformemente, havendo uma certa concentração. Pode-se, portanto, estudar os valores numéricos que determinam a distribuição dos dados, procurando o ponto onde está a maior concentração de valores individuais. De um modo geral, um conjunto de dados pode ocupar uma posição específica dentro de uma distribuição. Essas medidas que "posicionam" o dado (ou o grupo de dados) dentro de uma distribuição, são chamadas de medidas de tendência central. Essas medidas são: médias, mediana e moda.

Média aritmética:

É a soma de todos os valores, dividida pelo número total desses valores. Ou seja, em uma amostra com n elementos, a média pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

Exemplo: Durante o ano letivo, na disciplina de matemática, João tirou 50 no primeiro bimestre, 70 no segundo, 55 no terceiro e 70 no último. Considerando que a média necessária para aprovação é 60, João foi aprovado ou não na disciplina de matemática?

Solução:

Para responder essa pergunta, vamos calcular a média das notas obtidas por João nos 4 bimestres:

$$\bar{x} = \frac{50 + 70 + 55 + 70}{4} = \frac{245}{4} = 61{,}25$$

Portanto, como a média foi acima de 60, João foi aprovado na disciplina de matemática.

Moda:

A moda de um conjunto de valores corresponde ao valor que ocorre mais vezes.

Exemplo I: Na amostra do conjunto de notas que João obteve em matemática, a moda é 70, pois esse valor apareceu 2 vezes, enquanto os outros apenas uma vez.

Exemplo II: Qual é a moda do seguinte conjunto de dados: 2; 5; 1; 7; 5; 6; 1?

Repare que nesse caso há dois valores que se repetem duas vezes: 1 e 7, enquanto os outros apenas uma vez. Como há dois valores para a moda, esse conjunto de dados é chamado de **bimodal**.

Exemplo III: Seja o conjunto de dados 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, nesse caso não há um valor para a moda, pois todos dados aparecem com a mesma frequência, chamamos então esse conjunto de **amodal**.

Mediana:

A mediana é o valor que ocupa a posição central dos dados, após estes serem "organizados" em ordem crescente ou decrescente. A mediana divide a amostra "exatamente no meio", no caso de a amostra possuir um número "ímpar" de dados. Para um conjunto com n elementos, a mediana será o valor que ocupa a posição $\frac{\mathrm{n+1}}{2}$.

Por exemplo, considerando o seguinte conjunto de dados: $10;\ 35;\ 70;\ 90;\ 20;\ 60;\ 20$.

Para determinar a mediana, vamos organizar esse conjunto em ordem crescente: $10;\ 20;\ 20;\ 35;\ 60;\ 70;\ 90$. Como o conjunto tem 7 valores, a mediana será o valor que ocupa a posição $\frac{7+1}{2} = 4$, ou seja 35.

E qual seria a mediana das notas que João obteve na disciplina de matemática?

Para isso vamos organizar os valores em ordem crescente: $50;\ 55;\ 70;\ 70$. Observe que nesse caso nós temos um número par de dados, portanto dois valores ocupam a posição central.

Em casos como esse, quando a amostra tem um número par de valores, utilizamos as expressões $\frac{n}{2}$ e $\frac{n+2}{2}$, assim encontramos os dois valores que ocupam essas posições e calculamos a média entre eles.

Para encontrar a mediana das notas de João, faremos a média dos valores que ocupam as posições $\frac{4}{2} = 2$ e $\frac{4+2}{2} = 3$. Observando as notas de João em ordem crescente temos: 50; 55; 70; 70, portanto a mediana será a média entre os valores 55 e 70: $\frac{55+70}{2} = 62{,}5$.

Exercício: A tabela a seguir relaciona a quantidade de filhos dos funcionários de uma empresa:

Encontrar os valores referentes a média, moda e mediana do número de filhos dos funcionários dessa empresa.

Solução:

Para isso, primeiro vamos organizar os valores de forma crescente:

$$0;\ 1;\ 1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 3;\ 3;\ 3;\ 4$$

Média: $\mathbf{\frac{0+1+1+1+2+2+2+2+3+3+3+4}{12} = \frac{24}{12} = 2;}$

Moda: 2, pois é o valor que mais aparece (4 vezes);

Mediana: Como a amostra tem um número par de elementos (12), a mediana será a média entre os valores que ocupam as posições $\frac{12}{2} = 6$ e $\frac{12+2}{2} = 7$, portanto, a mediana será $\frac{2+2}{2} = 2$.

O Jogo dos 3M's (30 min)

Na sequência das explicações dos conceitos de média, moda e mediana, iremos utilizar um jogo, denominado “O Jogo dos 3Ms”, para a fixação desse conteúdo.

Material: 36 cartas de um baralho comum numeradas de 2 a 10, com quatro cartas de cada número e uma folha de papel para anotações das jogadas. Para este jogo utilizamos apenas o número da carta e não o naipe.

Objetivo: Obter o maior número de pontos. As pontuações serão obtidas em função dos maiores valores de uma das medidas de posição, dentre a média, a mediana ou a moda. Em cada rodada um dos jogadores escolhe qual dessas medidas de posição será utilizada.

Regras:

1 - Pode ser jogado por dois, três ou quatro jogadores. Cada partida consiste em três rodadas. Para cada rodada serão distribuídas no sentido anti-horário cinco cartas para cada jogador. A partir dessas cartas cada jogador irá calcular a média, a mediana e a moda referente aos números das cinco cartas. Os valores da média, da mediana e da moda correspondem às pontuações do jogador naquela rodada;

2 - A rodada se inicia com o primeiro jogador que recebeu as cartas. Em cada rodada o jogador tem a opção de comprar até duas cartas, uma de cada vez, do maço ou dentre aquelas já descartadas sobre a mesa, porém terá que descartar uma carta para cada carta comprada;

3 - Depois de realizada a operação de compra e descarte de cartas, cada jogador retira uma carta do maço, aquele que retirou a maior carta escolhe a medida de posição para a pontuação daquela rodada. Caso ocorram empates a operação é repetida dentre aqueles que empataram até que se defina quem vai escolher a medida de posição;

4 - Para finalizar a rodada, todos expõem as cinco cartas sobre a mesa com os valores já calculados e anotados em uma folha de papel para as três medidas de posição: média, mediana e moda. Quando as cinco cartas são diferentes, então a moda não existe; ou seja; o conjunto é amodal, e neste caso, a pontuação do jogador para a medida moda será convencionada como sendo igual à zero nesta rodada. Será desclassificado da rodada o jogador que calculou de maneira incorreta o valor de alguma das medidas de posição;

5 - Após a realização de cada rodada os jogadores serão classificados em primeiro, segundo; terceiro e quarto lugar, dependendo da pontuação obtida. O jogador que obteve o maior valor para a medida de posição é classificado em primeiro lugar e recebe três pontos, o segundo colocado recebe dois pontos, o terceiro colocado recebe um ponto e o último colocado não recebe pontuação naquela rodada. Caso ocorram empates, cada jogador receberá a pontuação correspondente à sua classificação. Após a realização da terceira rodada, os pontos obtidos em cada rodada serão somados, e vence o jogo aquele jogador que obteve o maior valor.

6- Medidas de dispersão, variância e desvio padrão (35 min)

As medidas de dispersão são utilizadas para saber qual o grau de variação dos dados, afinal, as medidas não são exatas, já que diversos fatores podem influenciar a coleta de dados, como o instrumento utilizado ou a amostra que está sendo estudada. Existe três medidas de dispersão: **amplitude**, **variância e desvio padrão.**

Amplitude: Consiste na diferença entre o maior e o menor valor de um conjunto de dados.

Variância: Permite identificar à medida que nos diz o quão distante da média estão os dados. Para calcular a variância temos a seguinte fórmula:

$$V^2 = \frac{(X1-\overline{x})^2 + (X2-\overline{x})^2 + (X3-\overline{x})^2 + \cdots + (Xn-\overline{x})^2}{n}$$

$\overline{x}$- Representa a média dos dados;

n- é a quantidade de dados.

Desvio padrão: Também representa à medida que nos diz a distância da média estão os dados.

$$Dp = \frac{\sqrt{(X1-\overline{x})^2 + (X2-\overline{x})^2 + (X3-\overline{x})^2 + \cdots + (Xn-\overline{x})^2}}{n}$$

Podemos perceber que a fórmula é muito semelhante com a fórmula de variância, tendo como uma única diferença a raiz envolvida, sendo assim, podemos dizer que ela é nada mais e nada menos que a raiz quadrada da variância:

$$Dp = \sqrt{V^2}$$

7- Exercícios (40 min)

1- Uma urna contém exatamente 30 etiquetas, numeradas de 1 a 30. Retirando-se, ao acaso, uma etiqueta da urna, qual é a probabilidade de obtermos um número menor do que 20 ou um múltiplo de 3?

2- Em uma empresa há 120 funcionários do sexo masculino e 90 do sexo feminino. Dos funcionários, 16 tem cargo de chefia e, das funcionárias, 12 tem o cargo de chefia, o que pode ser representado pelo seguinte quadro:

	Homem	Mulher
Chefia	16	12
Não chefia	104	78

Com isso, dado que foi escolhido um funcionário com cargo de chefia, qual é a probabilidade de ter sido escolhido um funcionário do sexo masculino?

Solução:

$$P(H/C) = \frac{16}{16+12} = \frac{16}{28}$$

Simplificando a equação: $P(H/C) = \frac{4}{7}$, desta forma, nessa situação a probabilidade de escolher um homem que ocupe o cargo de chefia é de 4 em 7.

3- (Ueg 2013) A professora Maria Paula registrou as notas de sete alunos, obtendo os seguintes valores: 2, 7, 5, 3, 4, 7 e 8. Determine a mediana, a média e a moda das notas desses alunos.

Solução:

$$Média = \frac{2+7+5+3+4+7+8}{7} = \frac{36}{7} \cong 5{,}14.$$

$Moda = 7$, pois é o valor que aparece mais vezes na amostra.

Para encontrar a mediana vamos organizar os dados desse conjunto em ordem crescente: 2, 3, 4, 5, 7, 7, 8.

A mediana será o valor que ocupa a posição central, nesse caso o dado que ocupa a posição $\frac{7+1}{2} = 4$, portanto:

$$Mediana = 5.$$

4- Durante o ano de 2020 foi realizado pelo Procon um levantamento de preços de dois itens da cesta básica nos 5 supermercados existentes uma pequena cidade. O resultado está apresentado na tabela abaixo (em R$) para alimentos da mesma marca.

Arroz (1 kg)	6,90	8,90	7,78	8,83	6,48	9,04
Feijão (1 kg)	8,20	7,90	9,05	8,40	7,59	10,99

Qual é a média, a variância e o desvio padrão dos preços de cada alimento?

Arroz

Média aritmética:

$$M = \frac{6{,}90 + 8{,}90 + 7{,}78 + 8{,}83 + 6{,}48 + 9{,}04}{6} = \frac{47{,}93}{6} = 7{,}99$$

Variância:

$$V = \frac{(6{,}90 - 7{,}99)^2 + (8{,}90 - 7{,}99)^2 + (7{,}78 - 7{,}99)^2 + (8{,}83 - 7{,}99)^2 + (6{,}48 - 7{,}99)^2 + (9{,}04 - 7{,}99)^2}{6}$$

$$V = \frac{(-1{,}09)^2 + (0{,}91)^2 + (-0{,}21)^2 + (0{,}84)^2 + (-1{,}51)^2 + (1{,}05)^2}{6}$$

$$V = \frac{1{,}1881 + 0{,}8281 + 0{,}0441 + 0{,}7056 + 2{,}2801 + 1{,}1025}{6}$$

$$V = \frac{6{,}1485}{6}$$

$$V = 1{,}025$$

Desvio padrão:

$$DP = \sqrt{1{,}025}$$

$$DP = 1{,}012$$

Feijão

Média aritmética

$$M = \frac{8{,}20+7{,}90+9{,}05+8{,}40+7{,}50+10{,}99}{6} = \frac{52{,}13}{6} = 8{,}69$$

Variância:

$$V = \frac{(8{,}20-8{,}69)^2+(7{,}90-8{,}69)^2+(9{,}05-8{,}69)^2+(8{,}40-8{,}69)^2+(7{,}59-8{,}69)^2+(10{,}99-8{,}69)^2}{6}$$

$$V = \frac{(-0{,}49)^2+(0{,}79)^2+(0{,}36)^2+(-0{,}29)^2+(-1{,}1)^2+(2{,}3)^2}{6}$$

$$V = \frac{0{,}2401+0{,}6241+0{,}1296+0{,}0841+1{,}21+5{,}29}{6}$$

$$V = \frac{7{,}5779}{6}$$

$$V = 1{,}26$$

Desvio padrão

$$DP = \sqrt{1{,}26}$$

$$DP = 1{,}12$$

Avaliação: A avaliação se desenvolverá no decorrer das aulas por meio de exercícios que vamos entregar para os alunos, recolher, corrigir e já dar uma devolutiva sobre a resolução.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos De Matemática Elementar: Matemática comercial, Matemática financeira e Estatística descritiva**. São Paulo: Atual, 2013. Cap. III. p. 107–126.

MATREEMÁTICA: Medidas de dispersão. Medidas de dispersão. Disponível em: https://lirte.pesquisa.ufabc.edu.br/matreematica/a-matematica-do-cotidiano/ramos/probabilidade-e-estatistica/medidas-de-dispersao/. Acesso em: 01 ago. 2024.

OLIVEIRA, Ricardo Tavares de. **PREPARA MATEMÁTICA**: livro do professor. São Paulo: Editora Ftd, 2023. 384 p.

PAIVA, Manoel. Probabilidade. In: PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2005. Cap. 27. p. 434-448.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Experimento Aleatório**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/experimento-aleatorio-1.htm#:~:text=O%20experimento%20aleat%C3%B3rio%20est%C3%A1%20relacionado,processos%20semelhantes%2C%20possuem%20resultados%20imprevis%C3%ADveis. Acesso em: 01 ago. 2024.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Definições básicas de probabilidade**. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/definicoes-basicasprobabilidade.htm#:~:text=Um%20evento%20%C3%A9%20qualquer%20subconjunto,E%20o%20evento%20em%20quest%C3%A3o. Acesso em: 01 ago. 2024.

TIPOS de Variáveis. Disponível em: http://leg.ufpr.br/~silvia/CE055/node8.html. Acesso em: 01 ago. 2024.

Variância e desvio padrão. **Toda Matéria**, *[s.d.]*. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/variancia-e-desvio-padrao/. Acesso em: 27 ago. 2024

Relatório Promat aula 2 – (31/08/2024)

No dia 31 de agosto de 2024, foi realizado o segundo encontro do PROMAT contando com a presença de 27 alunos, sendo que 7 deles não haviam participado do primeiro encontro. Ao recebê-los, nos apresentamos e pedimos para que fizessem o mesmo. Após isso, como na aula anterior, entregamos aos novos alunos um bombom para cada antes do início da aula.

No primeiro momento, pedimos se alguém tinha alguma dúvida referente a lista de exercícios proposta na aula anterior. Os alunos apontaram três questões: uma que envolvia o princípio fundamental da contagem retirada do ENEM, uma de combinação e uma de permutação. Os exercícios foram resolvidos no quadro, sendo que um aluno foi ao quadro expor sua resolução, os outros dois exercícios foram apresentados pelos estagiários. Este momento demandou em torno de 40 minutos até que todas as dúvidas foram sanadas.

Após a correção da lista, foi iniciado as explicações do conteúdo programado para a aula. Explicamos os conceitos de experimento aleatório e espaço amostral dando exemplos no quadro para melhor entendimento utilizamos o “jogo da ovelhinha”, que foi criado através da ideia de um jogo que está constantemente sendo visto nas redes sociais, o qual consiste em um jogo de aposta. O jogador anseia por uma combinação de três figuras iguais que estejam na mesma linha horizontal, pois ao atingir tal feito o jogador ganha uma certa quantia, referente à aposta realizada.

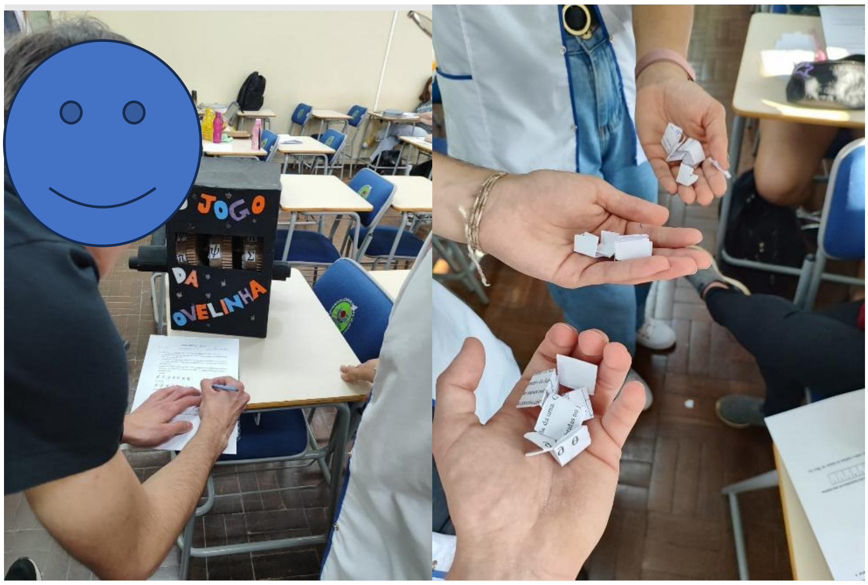
Em um segundo momento, após termos discutido sobre o cálculo de probabilidade os alunos deverão utilizar as anotações para calcular a probabilidade de cair as combinações que eles obtiveram durante o jogo.

Inicialmente um aluno se voluntariou a participar da atividade para uma melhor organização decidimos chamar os alunos por ordem de fileiras para que todos realizassem a atividade, cada aluno tinha três oportunidades.

Durante a realização, uma das primeiras alunas ao girar a manivela além do limite que o elástico suportava, acabou danificando o material; a manivela voltava a uma posição inicial a qual possibilitava o giro das roletas. Após o material ser danificado, nós mantivemos a atividade e pedimos que os alunos rodassem as roletas com um “peteleco”, fazendo assim o papel da manivela.

Como a atividade estava demandando muito tempo, uma vez que os alunos deviam girar a manivela três vezes e fazer a anotação das imagens obtidas nessas três vezes. A fim de contornar essa situação, improvisadamente, representamos os símbolos em pedacinhos de papel, dobramos e passamos nas carteiras para os alunos sortearem três imagens, fizemos três papéis para cada símbolo, sendo que três de nós passávamos nas carteiras, cada um segurando sete papeizinhos para o sorteio enquanto o outro estagiário coordenava a atividade com o material produzido. Apenas um aluno conseguiu obter três imagens idênticas durante a realização da atividade, este foi “premiado” com um bombom.

Figura 12 – Alunos realizando o jogo ov'



Fonte: Acervo dos autores

Após a dinâmica falamos sobre os tipos de variáveis (Quantitativa e Qualitativas). Explicamos a definição e citamos alguns exemplos solicitando que os alunos indicassem o tipo de variável quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa nominal ou qualitativa ordinal. Essas perguntas nos permitiram explorar a compreensão dos alunos, visto que eles conseguiram apontar corretamente as respostas sem apresentarem muitas dificuldades.

Na sequência, demos inícios às explicações sobre cálculo de probabilidades, apresentamos alguns exemplos e incentivamos os alunos a participarem na resolução destes. Eles se mostraram bem participativos nesse momento. Enquanto explicávamos o exercício na mesa de alguns alunos, chegou a hora do intervalo.

Retornamos a sala às dez horas, dando sequência às explicações sobre adição de probabilidades. Nesse momento, retornamos à dinâmica do "jogo da ovelhinha", realizada no início da aula, pedindo que os alunos calculassem a probabilidade de ser sorteada as imagens que eles obtiveram nesse jogo. Vários alunos apresentaram dificuldade na realização desse cálculo, então os ajudamos, individualmente, conforme nos solicitavam. Por fim, apresentamos a solução no quadro. Ao apresentar sobre probabilidade condicional, associamos de novo o conteúdo com o "jogo da ovelhinha" agora levando em consideração os três eventos e não de forma individual igual fizemos com a soma.

Após isso, apresentamos o tópico de medidas de tendências centrais. Os alunos se mostraram bem participativos nessa parte da aula, pois já apresentavam um bom conhecimento quanto aos conceitos de média, moda e mediana. Foi proposto um exercício referente a esses conceitos e a maioria da turma conseguiu resolver com facilidade. Ao calcular a mediana, eles se confundiram um pouco sobre como identificar o valor correspondente, visto que devemos levar em consideração se o conjunto de dados possui um número par ou ímpar de elementos. Em alguns casos, os alunos identificaram a posição do termo da mediana, mas esqueceram de colocar os números em ordem crescente ou decrescente.

Havia sido planejado um jogo de cartas para fixação desse conteúdo, porém percebemos que não haveria tempo hábil, já que faltavam apenas 20 minutos para o fim da aula. Então, decidimos utilizar essa atividade como recurso de retomada de conteúdo a ser realizada no início do próximo encontro.

Por fim, apresentamos os conceitos de medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). Nessa parte da aula, os alunos não estavam demonstrando muito interesse, poucos prestavam atenção, alguns estavam no celular, outros aparentavam estar com sono, nesse momento sempre procurávamos chamara atenção deles para que continuassem com o foco na aula mesmo eles estando dispersos pelo fato de estar no fim da aula.

Antes de finalizar a aula, recolhemos a lista com os exercícios que pedimos para que eles resolvessem durante a aula. A maioria dos alunos demostrou compreender o conteúdo da aula, errando apenas alguns cálculos ou confundindo o que utilizar para a resolução dos exercícios, mas não houve nenhum caso de não conseguirem realizar a atividade.

Ao final da aula, comunicamos aos alunos que no próximo sábado não haveria Promat devido ao feriado da Independência do Brasil, assim retornaríamos apenas no dia 14 de setembro com o conteúdo de matrizes e determinantes.

2.3 AULA 03 (14/09/2024) – PLANO DE AULA E RELATÓRIO

PLANO DE AULA 3 – (14/09/2024)

Fabrício Adriel Rustick
Maíri Poeta Castilho da Silva
Michelli Neves Lavagnoli
Milleni Ferreira de Souza

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio.
Tempo de execução: 4 horas-aula
Conteúdo: Matrizes e Determinantes
Objetivo Geral: Abordar o conteúdo de Matrizes e Determinantes de forma dinâmica, relembrar o que já foi trabalhado na escola, trabalhar com o cálculo mental e realizar exercícios.
Objetivos Específicos:
Ao se trabalhar com Matrizes e Determinantes, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer os tipos de Matrizes;
- Realizar a soma, subtração e multiplicação de Matrizes;
- Compreender os conceitos e propriedades de Determinantes;
- Apresentar o teorema de Laplace.

Recursos Didáticos: quadro, giz, computador, retroprojetor, slides e folha sulfitem.

Encaminhamento metodológico:

1- Revisão de conteúdo do encontro anterior (30 min)

O Jogo dos 3M's:

Com o intuito de revisar o conteúdo explorado na aula anterior, iremos utilizar um jogo, denominado "O Jogo dos 3Ms".

Material: 36 cartas de um baralho comum numeradas de 2 a 10, com quatro cartas de cada número e uma folha de papel para anotações das jogadas. Para este jogo utilizamos apenas o número da carta e não o naipe.

Objetivo: Obter o maior número de pontos. As pontuações serão obtidas em função dos maiores valores de uma das medidas de posição, dentre a média, a mediana ou a moda. Em cada rodada um dos jogadores escolhe qual dessas medidas de posição será utilizada.

Regras:

1 - Pode ser jogado por dois, três ou quatro jogadores. Cada partida consiste em três rodadas. Para cada rodada serão distribuídas no sentido anti-horário cinco cartas para cada jogador. A partir dessas cartas cada jogador irá calcular a média, a mediana e a moda referente aos números das cinco cartas. Os valores da média, da mediana e da moda correspondem às pontuações do jogador naquela rodada;

2 - A rodada se inicia com o primeiro jogador que recebeu as cartas. Em cada rodada o jogador tem a opção de comprar até duas cartas, uma de cada vez, do maço ou dentre aquelas já descartadas sobre a mesa, porém terá que descartar uma carta para cada carta comprada;

3 - Depois de realizada a operação de compra e descarte de cartas, cada jogador retira uma carta do maço, aquele que retirou a maior carta escolhe a medida de posição para a pontuação daquela rodada. Caso ocorram empates a operação é repetida dentre aqueles que empataram até que se defina quem vai escolher a medida de posição;

4 - Para finalizar a rodada, todos expõem as cinco cartas sobre a mesa com os valores já calculados e anotados em uma folha de papel para as três medidas de posição: média, mediana e moda. Quando as cinco cartas são diferentes, então a moda não existe; ou seja; o conjunto é amodal, e neste caso, a pontuação do jogador para a medida moda será convencionada como sendo igual à zero nesta rodada. Será desclassificado da rodada o jogador que calculou de maneira incorreta o valor de alguma das medidas de posição;

5 - Após a realização de cada rodada os jogadores serão classificados em primeiro, segundo terceiro e quarto lugar, dependendo da pontuação obtida. O jogador que obteve o maior valor para a medida de posição é classificado em primeiro lugar e recebe três pontos, o segundo colocado recebe dois pontos, o terceiro colocado recebe um ponto e o último colocado não recebe pontuação naquela rodada. Caso ocorram empates, cada jogador receberá a pontuação correspondente à sua classificação. Após a realização da terceira rodada, os pontos obtidos em cada rodada serão somados, e vence o jogo aquele jogador que obteve o maior valor.

2- Matriz (20 min)

Definição: Chama-se matriz do tipo $m \times n$ toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Tal tabela deve ser representada entre parênteses (), entre colchetes [ ] ou entre barras duplas || ||.

Exemplos:

a) $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ Matriz A do tipo 3×2.

b) $B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ Matriz B do tipo 2×2.

c) $C_{1\times 3} = \|4 \quad -1 \quad 5\|$ Matriz C do tipo 1×3.

Convenção: Indicamos por a_{ij} o elemento posicionado na linha i e coluna j de uma matriz A.

Representação genérica de uma matriz:

Uma matriz genérica A do tipo $m \times n$ pode ser representada da seguinte maneira:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Como essa representação é muito extensa, podemos representar a matriz simplesmente por $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Exemplo (Desenvolver no quadro com os alunos):

a) Representar a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 3}$ tal que $a_{ij} = 5i - j$.

Solução:

Inicialmente vamos escrever a matriz de forma genérica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Em seguida devemos calcular o valor de cada elemento pela lei que nos foi dada no enunciado:

$$a_{11} = 5 \times 1 - 1 = 4$$
$$a_{12} = 5 \times 1 - 2 = 3$$
$$a_{13} = 5 \times 1 - 3 = 2$$
$$a_{21} = 5 \times 2 - 1 = 9$$
$$a_{22} = 5 \times 2 - 2 = 8$$
$$a_{23} = 5 \times 2 - 3 = 7$$

Assim, a matriz é: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

3- Tipos de Matrizes (20 min)

Matriz linha: Toda matriz do tipo $1 \times n$ é chamada de matriz linha por apresentar uma única linha e várias colunas. A seguir, temos uma matriz linha 1×4 .

$$C = (0 \quad 2 \quad 5 \quad 7)$$

Matriz coluna: Toda matriz do tipo $m \times 1$ é chamada de matriz coluna por apresentar uma única coluna e várias linhas. Veja um exemplo a seguir de uma matriz 3×1.

$$D = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriz retangular: Uma matriz retangular tem a quantidade de linhas diferentes da quantidade de colunas. Assim um exemplo desse caso é uma matriz 2×3.

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Matriz quadrada: Uma matriz quadrada tem a mesma quantidade de linhas e de colunas. Também podemos dizer que essas matrizes têm ordem n. Assim, uma matriz F_4 pode ser exemplificada como:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & -3 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade: Toda matriz identidade de ordem n, cuja lei de formação é dada por: $a_{ij} = \begin{cases} 0, se\ i \neq j \\ 1, se\ i = j \end{cases}$, é chamada de matriz identidade. Nos casos a seguir, vemos alguns exemplos de matrizes identidade.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots.$$

Ou seja, na matriz identidade, todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 (um) e todos os demais são elementos iguais a 0 (zero).

Matriz nula: Em uma matriz nula, todos os elementos são iguais a 0 (zero), desta forma, a lei de formação dessa matriz é $a_{ij} = 0$. Observe o exemplo de uma matriz nula $O_{2\times3}$:

$$O_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta: A matriz transposta de A é indicada por A^t e é formada quando trocamos a posição dos elementos das colunas. Assim, se A é de ordem $m \times n$, A^t é de ordem $n \times m$. Desse modo, cada elemento da primeira linha de A passa a compor a primeira coluna de A^t; cada elemento da linha de A passa a compor a segunda coluna de A^t e assim sucessivamente.

Com isso, se $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$, temos: $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

4- Igualdade de Matrizes (20 min)

Para que duas ou mais matrizes sejam consideradas iguais elas devem obedecer a algumas regras:

• Devem ter a mesma ordem, ou seja, o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

• Os elementos devem ser iguais aos seus correspondentes.

• Portanto, podemos concluir que: A matriz $A_{2\times2}$ é igual a matriz B se, somente se, a matriz B tiver também a ordem $2x2$ e os elementos $a_{11} = b_{11}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{12} = b_{12}$ e $a_{22} = b_{22}$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como as condições de igualdade são satisfeitas, podemos concluir que $A = B$.

Exemplo de exercício envolvendo igualdade entre matrizes:

Determine o valor de x e y para que se tenha $A = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} x+3 & 11 \\ 9 & 2y-7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$$

Solução: Observe que as duas matrizes já possuem a mesma ordem, 2×2. Logo, temos que se $A = B$, então $\begin{bmatrix} x+3 & 11 \\ 9 & 2y-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$

Para que a matriz A seja igual à matriz B, deveremos ter as seguintes igualdades:

$$x + 3 = -5 \rightarrow x = -5 - 3 = -8$$
$$2y - 7 = 13 \rightarrow 2y = 13 + 7 \rightarrow y = \frac{20}{2} = 10$$

Portanto, $x = -8$ e $y = 10$.

5- Soma, Subtração e Multiplicação (25 min)

Soma:

A soma de duas matrizes A e B do tipo $m \, x \, n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+4 & 2-1 & 3+1 \\ 4-4 & 5+0 & 6-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Propriedades:

Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$ quaisquer que sejam A, B e C do tipo $m \, x \, n$;

Demonstração: Fazendo $(A + B) + C = X$ e $A + (B + C) = Y$, temos:

$$X_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + C_{ij} = A_{ij} + (B_{ij} + C_{ij}) = Y_{ij}$$

Comutativa: $A + B = B + A$ quaisquer que sejam A e B, do tipo $m \, x \, n$;

Demonstração: $A + B = X$ e $B + A = Y$ temos:

$$X_{IJ} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = Y_{ij}$$

Elemento neutro: $\exists \, M \mid A + M = A$ qualquer que seja A do tipo $m \, x \, n$;

Demonstração: $A + M = A$, resulta:

$$a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \Longrightarrow m_{ij} = 0 \Longrightarrow m = 0$$

Simétrico: Para todo A do tipo $m\ x\ n$: $\exists\ A' \big|\ A + A' = M$.

Demonstração: $A + A' = M = 0$

$$a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Longrightarrow a'_{ij} = -a_{ij}, \forall i, \forall j$$

Subtração:

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{mxn}\ e\ B = (b_{ij})_{mxn}$, chama-se subtração $A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 11 & 9 & 8 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 9 & 8 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & -7 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 9 & 7 \\ -5 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Multiplicação:

Multiplicar uma matriz A pôr um número K é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por K.

Exemplo:

$$3.\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 6 \\ 15 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

Propriedades:

- $a.(b.A) = (a.b).A$
- $a.(A + B) = a.A + a.B$
- $(a + b).A = a.A + b.A$
- $1.A = A$

Intervalo

6- Definição e propriedades de determinantes (30 min)

Definição: O determinante é um número obtido por meio de adições e multiplicações dos coeficientes de um sistema linear.

Determinante de ordem dois:

Observe o escalonamento do sistema, nas incógnitas x e y: $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$

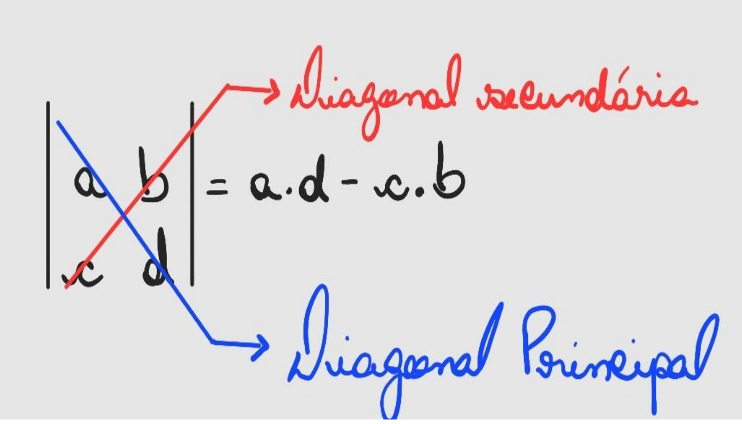
Ao multiplicar a linha 1 por $(-c)$ e a linha 2 por a e em seguida somarmos, iremos obter o seguinte resultado:

$$\begin{cases} \quad ax + by = p \\ (ad - cb)y = aq - cp \end{cases}$$

A expressão $ad - cb$ é chamada de determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dos coeficientes do sistema. Indica-se determinante por $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Em que a 1ª e a 2ª coluna são formadas, respectivamente, pelos coeficientes de x e y. Por estar associado a uma matriz 2×2, esse determinante tem ordem 2. Note, portanto, que um determinante de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nesta ordem:

Figura 13 – Diagonal principal e diagonal secundária para o cálculo de determinantes



Fonte: Produção dos autores

Exemplo (realizar no quadro com os alunos):

a) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes do sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$

Solução:

Basta multiplicarmos os valores da diagonal principal e em seguida subtrair o resultado da multiplicação dos valores da diagonal secundária.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (3 \times 7) - (2 \times 4) = 21 - 8 = 13.$$

O determinante de ordem três será abordado mais adiante.

Propriedade dos determinantes:

(1) O determinante depende linearmente de cada uma das linhas, isto é, se fizermos uma combinação linear de uma linha apenas, poderíamos ter feito uma combinação linear dos determinantes.

(2) Se uma linha de A for composta só por zeros, então $det\ A\ =\ 0$.

(3) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

(4) A operação elementar “trocar duas linhas de lugar” altera o sinal do determinante.

(5) A operação elementar de somar o múltiplo de uma linha à outra não altera o determinante. Em outras palavras, se um múltiplo de uma linha de A for somado à outra linha formando a matriz B, então $det\ A\ =\ det\ B$.

(6) Uma matriz A é invisível se, e somente se, $det\ A\ \neq\ 0$.

(7) Para quaisquer duas matrizes A e B de mesma ordem, $det(AB)\ =\ det\ A\ det\ B$.

(8) O determinante da matriz transposta de A é igual ao determinante de A, isto é, $det(A^T\ )\ =\ det\ A$.

7- Teorema fundamental de Laplace (20 min)

Para calcularmos o determinante de qualquer matriz, inclusiva de matrizes de ordem maior que 3, podemos usar o teorema de Laplace.

Para isso, devemos escolher um fila (linha ou coluna) qualquer da matriz e, em seguida, multiplicar cada um dos elementos dessa linha pelo cofator do elemento e somarmos os produtos encontrados.

Em uma matriz de ordem n, tomando os elementos da primeira linha como referência, fazemos:

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \times P_{11} + a_{12} \times P_{12} + \cdots + a_{1n}P_{1n}$$

Como devemos multiplicar o elemento pelo seu cofator, convém escolhermos a fila que contenha a **maior quantidade de zeros** para que o cálculo do determinante seja facilitado.

No exemplo seguinte, para o cálculo do determinante de uma matriz 4×4, vamos escolher a segunda coluna, pois é a que tem a maior quantidade de zeros.

Acompanhe:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = 0 \times P_{12} + 4 \times P_{22} + 0 \times P_{32} + 0 \times P_{42} \Rightarrow \det A = 4 \times P_{22} + 3 \times P_{42}$$

$$\Rightarrow \det A = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = 4 \times 0 + 3 \times 4 \Rightarrow \det A = 12$$

8- Cálculo de determinantes (15 min)

Já vimos como calcular o determinante de matrizes de ordem 2, agora vejamos como calcular o determinante de uma matriz de ordem 3 utilizando a regra de Sarrus: Dada a matriz M:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

definimos:

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

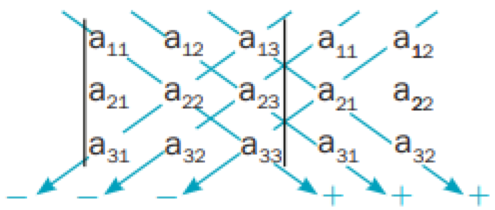
Podemos memorizar esta definição da seguinte forma:

a) Repetimos, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas;

b) Os termos precedidos pelo sinal + são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as fechas situadas na direção da diagonal principal;

c) Os termos precedidos pelo sinal – são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária.

Figura 14 – Cálculo do determinante



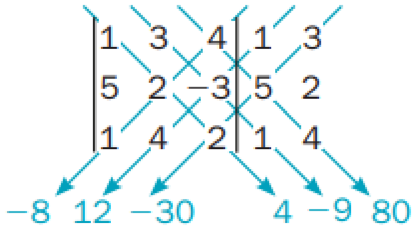
Fonte: Produção dos autores

Este dispositivo prático é conhecido como **regra de Sarrus** para o cálculo de determinantes de ordem 3.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49$$

Figura 15 – Cálculo do determinante

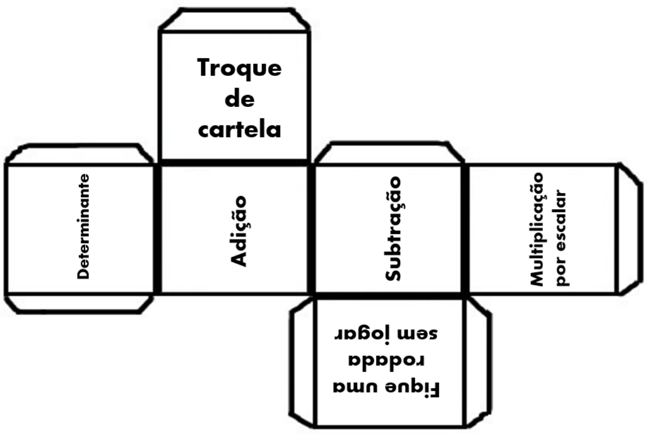


Fonte: Produção dos autores

9- Desafio das matrizes e dos determinantes (20min)

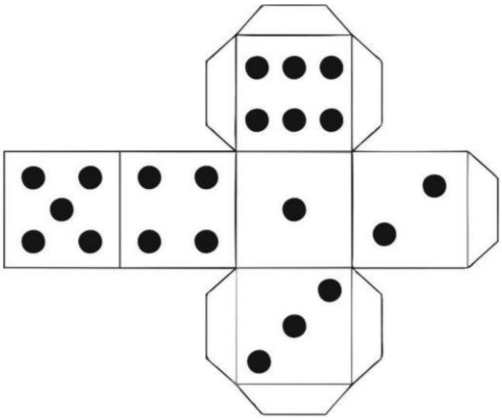
Para realizar esse jogo a turma será dividida em grupos de até cinco pessoas, onde cada grupo irá receber 50 cartelas que contêm matrizes 2×2 e 3×3, um dado de ação, um dado d6 normal, lápis e papel. Na figura 17 temos o dado da ação, na figura 18 o dado d6 normal e na figura 19 um modelo da cartela.

Figura 16 – Dado da ação



Fonte: Acervo dos autores

Figura 17 – Dado d6



Fonte: Acervo dos autores

Figura 18 – Exemplo da cartela do jogo

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 & -6 \\ -4 & 5 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Fonte: Produção dos autores

Regras do jogo:

Inicialmente as cartelas serão distribuídas no centro da mesa viradas de cabeça para baixo. Após essa organização, será jogado o dado d6 para definir a ordem em que cada aluno irá jogar.

Em seguida, cada um pegará uma cartela e o primeiro jogador deverá jogar o dado da ação. A ação que cair o grupo deverá realizar.

Cada jogador irá desenvolver a ação que foi estipulada em um tempo pré-determinado pelos professores.

Caso caia a opção troque de cartela, todos os alunos irão trocar a cartela com o colega do lado esquerdo.

Caso caia a opção fique uma rodada sem jogar, o jogador que está com o dado devolve a cartela para o centro da mesa e passa o dado para o próximo jogador da ordem.

Em cada grupo terá um professor cuidando do tempo e verificando se os resultados estão corretos.

A pontuação é definida de acordo com o tempo e se a resposta da atividade está correta. Vence o jogador do grupo que chegar à última rodada com a maior pontuação. A quantidade de rodadas será definida pelos professores.

Pontuação:

A pontuação será feita por mérito. Daremos um tempo pré-determinado, o aluno que:

- Resolver a atividade corretamente e no tempo definido ganhará 10 pontos;
- Resolver a atividade no tempo, porém obter o resultado errado ganhará 5 pontos;
- Não resolver no tempo estipulado ou não realizar a atividade 0 pontos;

10- Exercícios:

1) Quais os possíveis valores de x, y, w e z para que ocorra $A = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} -5x-4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & y-12 \\ w^2 & 3 & -z+8 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -19 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & -12 \\ 144 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução: As matrizes A e B apresentam a mesma ordem, 3×3. Assim temos que

se $A = B$, então

$$\begin{bmatrix} -5x-4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & y-12 \\ w^2 & 3 & -z+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & -12 \\ 144 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Daí, obtemos as seguintes igualdades:

$$-5x - 4 = -19$$

$$-5x = -19 + 4$$

$$-5x = -15$$

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5}$$

$$x = 3$$

$$y - 12 = -12$$

$$y = -12 + 12$$

$$y = 0$$

$$w^2 = 144$$

$$w = \pm\sqrt{144}$$

$$w = \pm 12$$

$$-z + 8 = -1$$

$$-z = -1 - 8$$

$$-z = -9$$

$$z = 9$$

2) Calcule o determinante da matriz a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Vamos aplicar o teorema de Laplace à terceira coluna, por haver mais zeros. Desta fora, temos:

$$\det A = 3 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 6 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = 3 \times (4 + 60 - 16 + 25) - 6 \times (10 + 24 + 8 - 32 + 10 + 6)$$

$$\Rightarrow \det A = 3 \times 73 - 6 \times 26 \Rightarrow \det A = 219 - 156 = 63$$

3) Efetue as operações entre as matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 11 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

c) $3.\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 3 \\ 21 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

4) Calcule os determinantes pela regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Solução:

Primeiro, vamos repetir as duas primeiras colunas ao lado dessa matriz:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Utilizando a regra de Sarrus:

$$1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Solução:

Repetindo as duas primeiras colunas:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

Utilizando a regra de Sarrus:

$$0 - 12 - 10 + 0 + 10 + 3 = -9$$

Avaliação: A avaliação se desenvolverá no decorrer das aulas por meio de questões que vamos entregar aos alunos e depois realizar a correção das mesmas e a devolutiva.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos De Matemática Elementar: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas**. São Paulo: Atual, 2013. Cap. V. p. 82–133.

OLIVEIRA, Ricardo Tavares de. **PREPARA MATEMÁTICA**: livro do professor. São Paulo: Editora Ftd, 2023. 384 p.

PAIVA, Manoel. Matrizes. In: PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2005. Cap. 19. p. 299-310.

PAIVA, Manoel. O conceito de determinante e aplicações. In: PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2005. Cap. 21. p. 329-339.

Relatório Promat aula 3 – (14/09/2024)

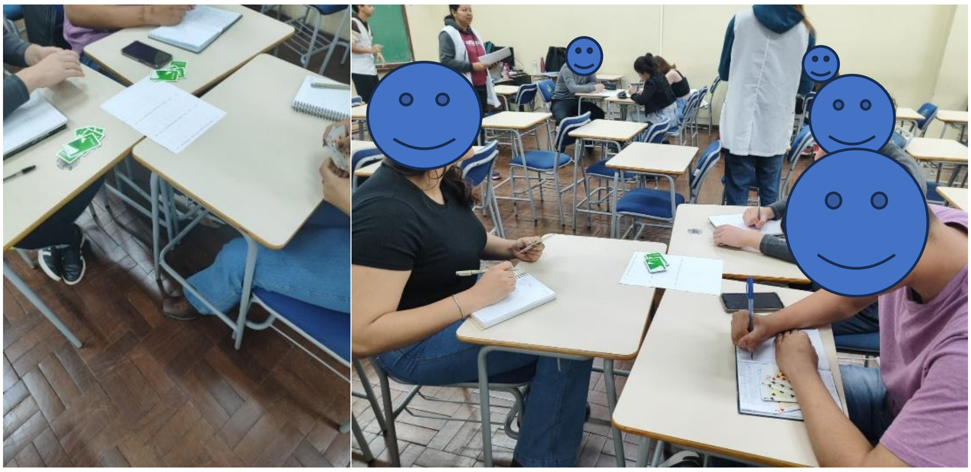
No dia 14 de setembro de 2024, foi realizado o 3º encontro do Promat, contando com a presença de 11 alunos, o baixo índice de presença de alunos neste dia pode ser justificado devido ao clima frio e tempo chuvoso.

Antes do horário de início da aula, conforme os alunos chegavam os convidamos a realizar um jogo conosco conhecido popularmente como “21”. Nesse jogo os participantes se revezam para contar números a partir de 1 até 21, a cada vez que alguém diz o número 21, essa pessoa adiciona uma nova regra ao jogo. Por exemplo, “A partir de agora ao invés de falar o número 3, a pessoa deve bater palmas” ou “Ao invés de falar o número 10 a pessoa deve falar chocolate”. As regras são cumulativas a cada rodada, e quando alguém erra a contagem deve começar novamente. A utilização desse jogo nos possibilitou uma boa interação com os estudantes, proporcionando um momento de descontração e diversão.

Iniciamos a aula aplicando um jogo de baralho, onde são utilizadas as medidas de tendência central (média, moda e mediana). Esse jogo estava previsto para ser utilizado na aula anterior, porém não houve tempo suficiente para isso, então decidimos utilizar no início dessa aula como forma de revisão do conteúdo.

Antes dos alunos começarem a praticar essa atividade, fizemos uma rápida retomada da definição dos conceitos envolvidos, expondo um exemplo no quadro. Os estudantes se mostraram bem interessados e desenvolveram o jogo sem muitas dificuldades, apresentaram ter entendido bem o conteúdo explorado. Acompanhamos o desenvolvimento desse jogo, tirando possíveis dúvidas que surgiam no decorrer da atividade e verificando se os valores que identificavam referente a média, moda e mediana estavam corretos.

Figura 19 – Jogo dos 3 M's



Fonte: Acervo dos autores

Solicitamos que os alunos organizassem as carteiras em um semicírculo para acompanharem a aula, nesse momento entregamos para eles um material contendo o conteúdo a ser trabalhado na aula e uma lista de exercícios.

Informamos aos alunos que nessa aula exploraríamos o conteúdo de matrizes e determinantes, primeiramente apresentamos a definição do que é uma matriz, exemplos de matrizes com diferentes ordens e a representação genérica de uma matriz. Propomos um exercício para os alunos, onde deviam representar a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ tal que $a_{ij} = 5i - 7$, inicialmente eles se mostraram um pouco confusos, alguns comentaram que não viram matrizes no contexto escolar, fizemos então o desenvolvimento deste estimulando-os a participar do raciocínio, eles se mostraram bem engajadas e aparentemente conseguiram entender a resolução deste exercício. Uma aluna questionou se ao invés de representar os elementos da matriz como a_{ij} poderia escrever $a_{i,j}$, que segundo ela seria mais fácil de identificar os elementos, explicamos que a representação usual é sem o uso da virgula, e que ela é usada geralmente quando está se lidando com um problema envolvendo vetores.

Dando sequência, apresentamos as características que diferenciam diferentes tipos de matrizes, sendo matriz linha, matriz coluna, matriz retangular, matriz quadrada, matriz identidade, matriz nula e matriz transposta. Os alunos não apresentaram dúvidas referentes a essas definições.

Em seguida, apresentamos as condições para que duas matrizes sejam iguais, explicamos que para isso ocorrer ambas devem ter a mesma ordem e os elementos correspondentes devem ser iguais. Mostramos um exemplo onde ocorria igualdade entre duas matrizes e pedimos para os alunos apontarem porque podíamos considerar que elas eram iguais, eles responderam sem dificuldade.

Após isso, propomos um exercício contendo duas matrizes de ordem 2×2, sendo que em uma delas dois elementos eram representados por equações com as incógnitas x e y, o objetivo era identificar os valores correspondentes a essas duas incógnitas de forma que sejam verificadas as condições de igualdade entre as duas matrizes. Os estudantes conseguiram efetivar a resolução desse exercício com facilidade, após todos terminarem apresentamos a solução no quadro estimulando-os a participar do desenvolvimento da resolução.

Apresentamos a maneira como realizar a operação de adição entre matrizes, expomos que para realizar essa operação as matrizes envolvidas devem ter a mesma ordem, caso contrário não é possível realizá-la. Mostramos que o resultado da soma de duas matrizes é obtido adicionando os elementos correspondentes termo a termo, foram apresentados exemplos e um exercício, o qual os alunos desenvolveram tranquilamente. Descrevemos as propriedades da adição entre matrizes (associativa, comutativa, elemento neutro e simétrico, expondo exemplos para facilitar o entendimento destas.

Após isso, definimos a maneira de operar a subtração entre matrizes, explicamos que para isso podemos adicionar a primeira com a matriz oposta da segunda. Apresentamos um exemplo no quadro e propomos um exercício para verificar se os alunos conseguiram compreender, enquanto os alunos realizavam essa atividade foi encerrada a primeira parte da aula e eles foram liberados para o intervalo. Ao retornar para a sala, demos um tempo para finalizarem o exercício proposto e em seguida apresentamos a resolução no quadro solicitando que eles informassem os valores que encontraram para cada elemento da matriz obtida a partir da subtração das duas iniciais, nesse momento percebemos que alguns alunos se confundiram no uso correto do sinal.

Apresentamos então a maneira utilizada para calcular a multiplicação de uma matriz por escalar, explicamos que o número escalar k deve ser multiplicado por cada um dos elementos da matriz. Apresentamos um exemplo e aplicamos um exercício, o qual foi desenvolvido facilmente pelos estudantes. Não apresentamos a forma para realizar a operação de multiplicação entre matrizes pois não estava previsto no planejamento da aula, porém informamos que enviaremos algo referente a isto no grupo da turma no WhatsApp.

Definimos a forma de encontrar o valor correspondente ao determinante de uma matriz, inicialmente focamos apenas em matrizes quadradas de ordem 2. Para isso, mostramos a forma de um sistema linear de incógnitas x e y, foi feito o desenvolvimento multiplicando a primeira linha do sistema por $(-c)$ e a segunda por a, de forma a obter a expressão que dá o valor do determinante. Explicamos que em uma matriz 2×2, o determinante é obtido a partir da diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, além de formalizar apresentamos exemplos a fim de facilitar a compreensão. Apresentamos propriedades dos determinantes, as quais estavam descritas no material do aluno e nos slides, pedimos para os alunos lerem essas propriedades, e eles se revezaram na leitura.

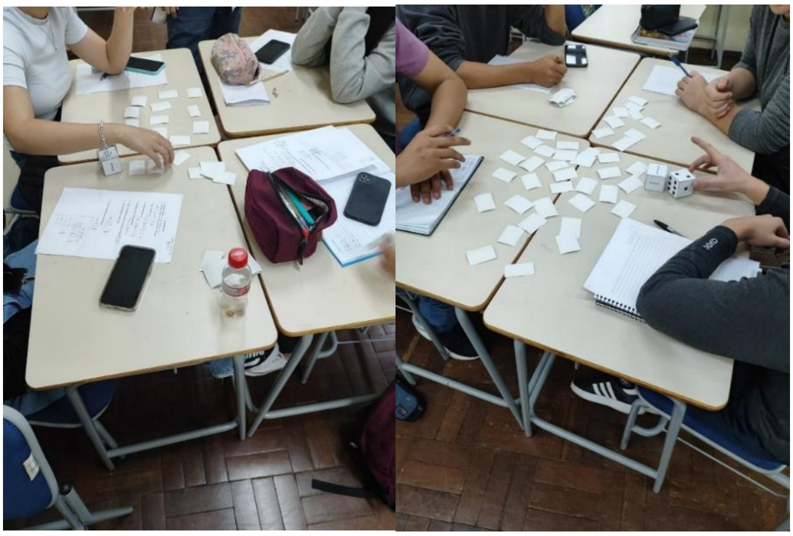
Dando sequência na aula, apresentamos o Teorema Fundamental de Laplace, utilizado principalmente para o cálculo do determinante de matrizes de ordem maior que 3. Mostramos a definição de como esse método é aplicado e para mostrar um exemplo, pedimos para os alunos construímos no quadro uma matriz de ordem 3, onde cada aluno escolheu o valor referente a um elemento dessa matriz e calculamos o determinante estimulando-os a participar da resolução.

Finalizamos a formalização do conteúdo expondo a Regra de Sarrus, um dispositivo prático muito conhecido para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3. Para isso foi apresentada a definição de forma geral da ideia desse método e apresentado um exemplo numérico para facilitar o entendimento. Alguns alunos comentaram que já haviam estudado esse método, porém a maioria ainda não o conhecia.

Ao fim da aula, de forma a fixar os conceitos abordados propomos um jogo, denominado “Desafio das matrizes e dos determinantes”. Para essa atividade dividimos os alunos em três grupos, cada grupo recebeu dois dados (um dado comum numerado de 1 a 6 e um dado contendo ações a serem desenvolvidas no jogo) e 50 cartelas contendo matrizes diversas de ordem 2 e de ordem 3. Orientamos os alunos a distribuírem as cartelas no centro da mesa viradas para baixo.

Para iniciar o jogo, cada aluno devia jogar o dado comum para verificar a ordem em que jogariam, em seguida cada um pegava uma cartela e o primeiro jogador devia jogar o dado contendo as ações, a ação que cair devia ser realizada por todos os estudantes. Acompanhamos o desenvolvimento dos alunos nessa atividade sanando as dúvidas que surgiam e verificando se as respostas indicadas por eles estavam corretas. Faltando alguns minutos para o fim da aula, orientamos os alunos a finalizarem a rodada que estavam realizando e se organizarem para ir embora.

Figura 20 – Desafio das matrizes e dos determinantes



Fonte: Acervo dos autores

Ao final nos despedimos dos estudantes e pedimos que levassem a folha de exercícios propostos para casa e retornassem na próxima aula, uma vez que não foi possível a finalização de todos os exercícios no tempo da aula.

2.4 AULA 04 (21/09/2024) – PLANO DE AULA E RELATÓRIO

PLANO DE AULA 4 – (21/09/2024)

Fabrício Adriel Rustick
Maíri Poeta Castilho da Silva
Michelli Neves Lavagnoli
Milleni Ferreira de Souza

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio
Tempo de execução: 4 horas-aula
Conteúdo: Sistemas Lineares

Objetivo Geral: Resolver sistemas lineares de até três equações, utilizando os métodos da substituição e adição, bem como representar e interpretar o significado das soluções.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Sistemas Lineares, objetiva-se que os alunos sejam capazes de:

- Compreender o conceito de equação linear e sistema linear;
- Identificar diferentes maneiras de resolver um sistema linear;
- Representar um sistema linear graficamente identificando suas soluções;
- Resolver situações-problemas por meio de sistemas lineares.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, computador, projetor, slides, folha sulfite, geogebra.

Encaminhamento metodológico:

1- Definição de Equação Linear (10min)

Toda equação do 1ºgrau com uma ou mais incógnitas é denominada equação linear.

De maneira geral: Denomina-se equação linear toda equação que pode ser escrita na forma geral:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Em que:

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ - São incógnitas;

$a_1, a_2, a_3, \dots\ , a_n$ - São números reais chamados **coeficientes das incógnitas;**

b é um número real identificado como termo independente.

Exemplos de equações lineares:

$$3x - 2y = 8$$

Nesse caso, 3 e -2 são coeficientes; x e y são as incógnitas; e 8 é o termo independente.

$$-x + \frac{2}{5}y + 4z - 13w = -7$$

Nesse caso, $-1, \frac{2}{5}$, 4 e -13 são coeficientes; x, y, z e w são incógnitas; e -7 é o termo independente.

As equações lineares em que o termo independente é igual a zero são denominadas equações lineares homogêneas. A equação linear $-7x + 4y = 0$, por exemplo, é homogênea.

2- Definição de Sistema de Equações Lineares (10min)

Denomina-se sistema linear $m\,x\,n$ o conjunto de $\boldsymbol{m}$ equações lineares em $\boldsymbol{n}$ incógnitas cada, que pode ser representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{12}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mx}x_n = b_m \end{cases}$$

No sistema linear, por exemplo, temos:

- a_{11} é o coeficiente da incógnita x_1 na 1ª equação;
- a_{23} é o coeficiente da incógnita x_3 na 2ª equação;
- a_{m2} é o coeficiente da incógnita x_2 na m-ésima equação.

Exemplos:

Sistema linear 2x2, lê-se dois por dois, nas incógnitas x e y.

$$\begin{cases} -x - y = -5 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$$

Sistema linear 3x2 nas incógnitas x e y.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 4x + y = 3 \\ -x + y = -2 \end{cases}$$

Sistema linear 2x3 nas incógnitas x, y e z.

$$\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 7 \end{cases}$$

3- Definição de solução de um sistema (40min) (realizar a atividade 1 da lista com o geogebra)

Dizemos que $(\propto_1, \propto_2, \propto_3, \dots, \propto_n)$ é a solução de um sistema linear quando $(\propto_1, \propto_2, \propto_3, \dots, \propto_n)$ é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

Exemplos:

1º) $\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ -2x + y = -11 \end{cases}$

O par (9,7) é a solução do sistema, pois $\begin{cases} 4.9 - 5.7 = 1 \\ -2.9 + 7 = -11 \end{cases}$

O par (4,3) não é solução do sistema, pois $\begin{cases} 4.4 - 5.3 = 1 \\ -2.4 + 3 \neq -11 \end{cases}$

O par (5,-1) não é solução do sistema, pois $\begin{cases} 4.5 - 5(-1) \neq 1 \\ -2.5 + (-1) = -11 \end{cases}$

2º) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z = 15 \\ -x + 4y + z = 24 \\ 3x - y + 7z = -7 \end{cases}$

A terna (-3,5,1) é solução do sistema, pois $\begin{cases} 2.(-3) + 3.5 + 6.1 = 15 \\ -(-3) + 4.5 + 1 = 24 \\ 3.(-3) - 5 + 7.1 = -7 \end{cases}$

Mas, como encontrar a solução de um sistema linear? A seguir apresentamos dois métodos...

4- Método da adição e método da substituição (Sistema 2x2) (40 min)

Método da Adição: O método da adição consiste em realizar a multiplicação de todos os termos de uma das equações, de tal modo que, ao somar-se a equação I na equação II, uma de suas incógnitas fique igual a zero.

Exemplo:

Encontre a solução para o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \text{ (equação I)} \\ 5x + y = 7 \text{ (equação II)} \end{cases}$$

Solução: Para resolver este sistema vamos analisar qual das incógnitas é mais fácil de eliminar. Nesse caso, a incógnita y pode ser eliminada facilmente quando realizada a adição da equação I com a equação II.

$$(3x - y) + (5x + y) = 1 + 7$$
$$8x = 8$$
$$x = 1$$

Agora, basta substituir o valor de x em uma das equações.

$$3(1) - y = 1$$
$$3 - y = 1$$
$$-y = 1 - 3$$
$$-y = -2$$
$$y = 2$$

Logo, a solução desse sistema é $x = 1$ e $y = 2$.

Exercício (para os alunos)

Encontre a solução para o sistema de equações usando o método da adição:

$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ -6x - 2y = -4 \end{cases}$$

Solução: Para resolver esse exercício, primeiramente vamos deixar as equações na forma $ax + by = c$.

$$\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -6x - 2y = -4 \end{cases}$$

Em seguida, devemos manipular uma das incógnitas para eliminá-la. Nesse caso, podemos multiplicar o 2 na primeira equação e em seguida somamos as duas equações.

$$\begin{cases} -4x + 2y = 14 \\ -6x - 2y = -4 \end{cases}$$

$$(-4x + 2y) + (-6x - 2y) = 14 + (-4)$$

$$-10x = 10$$

$$x = -1$$

Agora, basta escolher uma das equações e substituir o valor de x, deste modo, iremos obter o valor da incógnita y.

Método da substituição: o método da substituição consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e realizar a substituição na outra equação.

Exemplo:

Encontre as soluções para o sistema de equações usando o método da substituição:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Solução: para resolver esse exercício, devemos escolher uma das incógnitas para isolar. Nesse caso, vamos escolher a incógnita x.

$$\begin{cases} x = 10 - 2y \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Após isolar o x da primeira equação, devemos substituir o valor de x na segunda equação. Sendo assim, esse sistema ficará da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = 10 - 2y \\ 2(10 - 2y) - y = 5 \end{cases}$$

Resolvendo a equação dois chegaremos ao resultado da incógnita y.

$$2(10 - 2y) - y = 5$$

$$20 - 5y = 5$$

$$-5y = 5 - 20$$

$$-5y = -15$$

$$y = 3$$

Retornando a equação um e substituindo o valor de y, obtemos o resultado da incógnita x.

$$x = 10 - 2y$$

$$x = 10 - 2(3)$$

$$x = 10 - 6$$

$$x = 4$$

Logo a solução desse sistema é $x = 4$ e $y = 3$.

Exercício para os alunos:

Utilizando o método da substituição encontre a solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2(2x - 4) + y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

Solução: para resolver esse exercício, devemos escolher uma das incógnitas para isolar. Nesse caso, vamos escolher a incógnita y.

$$\begin{cases} 2(2x - 4) + y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 4x + 8 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

Após isolar o y da primeira equação, devemos substituir o valor de y na segunda equação. Sendo assim, esse sistema ficará da seguinte maneira:

$$\begin{cases} y = -4x + 11 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$$

Resolvendo a equação dois chegaremos ao resultado da incógnita x.

$$-x + 2(-4x + 11) = 4$$

$$-x - 8x + 22 = 4$$

$$-9x = 4 - 22$$
$$-9x = -18$$
$$x = 2$$

Retornando a equação um e substituindo o valor de x, obtemos o resultado da incógnita y.

$$y = -4x + 11$$
$$y = -4(2) + 11$$
$$y = -8 + 11$$
$$y = 3$$

Logo a solução desse sistema é $x = 2$ e $y = 3$.

5- Representação Gráfica das Equações Lineares (1h40min)

Em um plano cartesiano, as equações da forma $ax + by = c$ em que a e b são simultaneamente não-nulos, definem uma reta. A solução de um sistema linear de duas equações a duas variáveis corresponde aos pontos comuns às restas relacionadas a essas equações.

Quando nos deparamos com sistemas lineares, conseguimos representá-los graficamente e conseguimos identificar o par ordenado que resulta em sua solução, no caso encontramos um valor para x e para y que satisfaça o sistema.

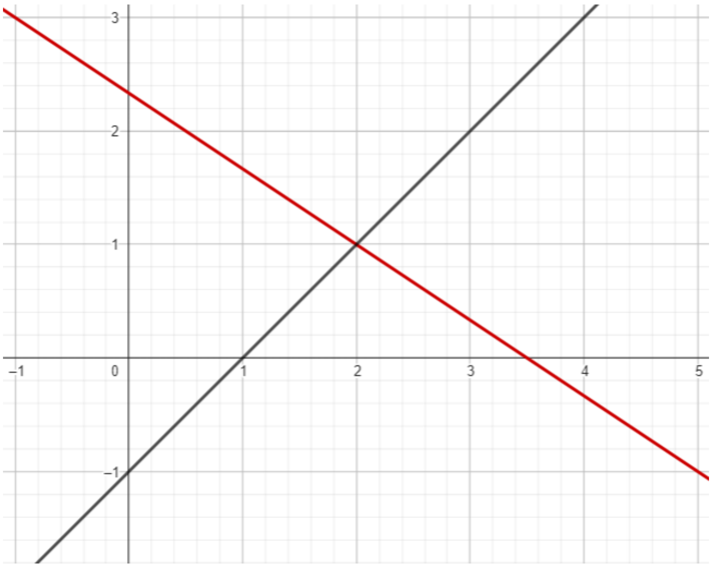
Podemos observar que isso ocorre com o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Se realizarmos a solução deste sistema encontramos os seguintes valores que satisfazem as duas equações que são $x = 2$ e $y = 1$.

Entretanto, quando construímos graficamente estas duas equações no sistema, vemos:

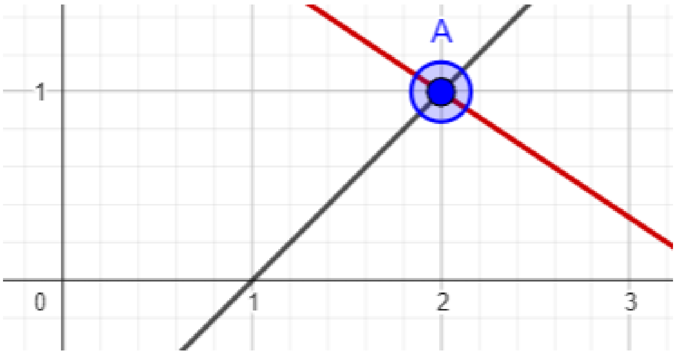
Figura 21 – Gráfico das equações



Fonte: Acervo dos autores

Podemos notar que dadas essas duas equações temos uma interseção que ocorre entre elas, e esse único ponto é o par ordenado que satisfaz o sistema.

Figura 22 – Par ordenado que satisfaz o sistema



Fonte: Produção dos autores

Conseguimos notar que o ponto A tem o par ordenado (2,1). Neste caso x = 2 e y = 1, que correspondem aos valores encontrados anteriormente.

Entretando, assim, um sistema pode ser: determinado, com uma solução, impossível sem solução ou indeterminado com infinitas soluções. Graficamente podemos notar estes aspectos.

Exemplo:

Dado o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = -8 \\ -x - 2y = 10 \end{cases}$$

Primeiramente, vamos realizar o cálculo para encontrar as possíveis soluções:

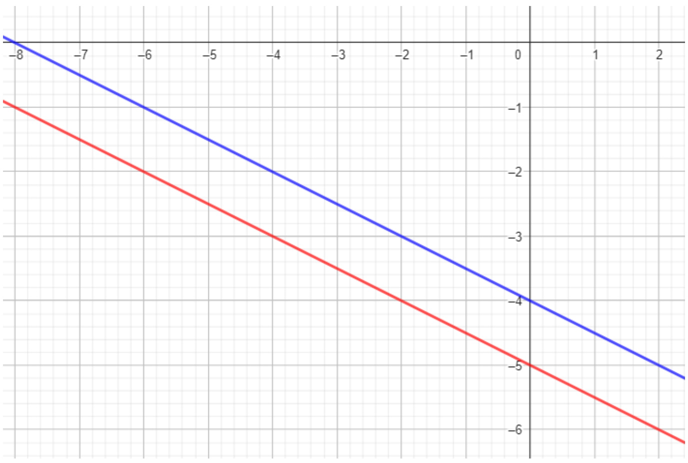
- Na equação $x + 2y = -8$, temos: $x = -8 - 2y$
- Substituindo na segunda equação, temos:

$$-(-8 - 2y) - 2y = 10 \Rightarrow 8 + 2y - 2y = 10 = 0y = 2$$

- Quando nos deparamos com este tipo de caso, dizemos que esse sistema é impossível, pois não há valores de x e y que satisfaçam as equações dadas. Portanto, a solução do sistema é o conjunto vazio, ou seja, $S = \emptyset$.

Agora olhemos para o gráfico para perceber o motivo do sistema ser impossível:

Figura 23 – Gráfico de um sistema impossível



Fonte: Produção dos autores

Podemos perceber que as retas são paralelas, por tal classificação que o sistema se torna impossível, pois diferente do caso anterior, não existe um ponto do qual elas se intersectem.

Vamos observar o outro caso com o seguinte exemplo:

Dado o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$$

Primeiramente, vamos realizar o cálculo para encontrar as possíveis soluções:

- Na equação $x - y = 5$, temos: $x = 5 + y$
- Substituindo na segunda equação, temos:

$$2(5 + y) - 2y = 10 \Rightarrow 10 + 2y - 2y = 10 \Rightarrow 0y = 0$$

- Se isolarmos o y na primeira equação e substituirmos na segunda equação, temos:

$$y = -5 + x \Rightarrow 2x - 2(-5 + x) = 10 \Rightarrow 2x + 10 - 2x = 10 \Rightarrow 0x = 0$$

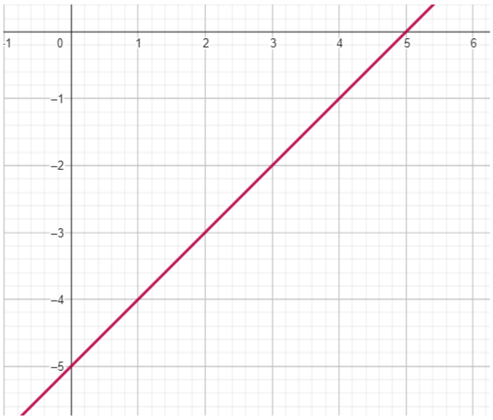
- Podemos perceber que a igualdade é verificada para qualquer valor de x e y. Para obter a solução do sistema, vamos isolar y, ou seja:

$$x - y = 5 \Rightarrow y = x - 5$$

- Assim, as soluções dos sistemas são representadas pelas duplas do tipo: $(x, x - 5)$. Dizemos que, para qualquer valor real de x, esse sistema é possível e indeterminado.

Agora olhemos para o gráfico para perceber o motivo do sistema ser possível e indeterminado:

Figura 24 – Gráfico de um sistema possível e indeterminado



Fonte: Produção dos autores

Ao observamos os gráficos notamos que as duas equações, $x - y = 5$ e $2x - 2y = 10$, podem ser escritas sob a forma $y = x - 5$ e, por isso, representam a mesma reta, ou seja, as duas retas são coincidentes.

6- Jogo kahoot

Para essa aula utilizaremos o Kahoot, um quizz digital interativo, no qual elaboramos perguntas que podem ser respondidas de forma rápida e servem como uma fixação dos conteúdos abordados em sala.

Perguntas para o Kahoot:

7- Na equação $-3x + \frac{5}{2}y - w = 7$, x, y e w são:

a) Coeficientes

b) Incógnitas

c) Termos independentes

d) Equações

8- Na equação $-3x + \frac{5}{2}y - w = 7$, quais são os coeficientes das incógnitas?

a) $-3, \frac{5}{2}$

b) x, y, w

c) 7

d) $-3, \frac{5}{2}, -1$

9- Na equação $-3x + \frac{5}{2}y - w = 7$, o número 7, representa:

a) Coeficiente

b) Incógnita

c) Termo independente

d) Termo dependente

10-Qual o termo independente da equação $-x + 3y + 7 = 2$?

a) -5

b) 9

c) 7

d) 2

11-Qual das seguintes equações é uma equação linear homogênea?

a) $x + y = 3$

b) $3x - y - 5 = -5$

c) $1 + 2x - y = 0$

d) $2x + 7y + 1 = -1$

12-Qual das seguintes opções apresenta um sistema linear 2×3?

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \\ \frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 25 \\ \frac{1}{2}x + y + w = 18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + \frac{1}{2}y = 13 \\ 8x - 2w = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{1}{2}x + 2y = 9 \end{cases}$

13-O sistema linear $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 11x - w = 7 \\ -y + \frac{1}{2}z = 6 \end{cases}$ é um sistema:

a) 2×3

b) 3×2

c) 3×3

d) 3×4

14-Verdadeiro ou falso: Em um plano cartesiano, as equações da forma $ax + by = c$, em que a e b são simultaneamente não-nulos, definem uma reta.

a) Verdadeiro

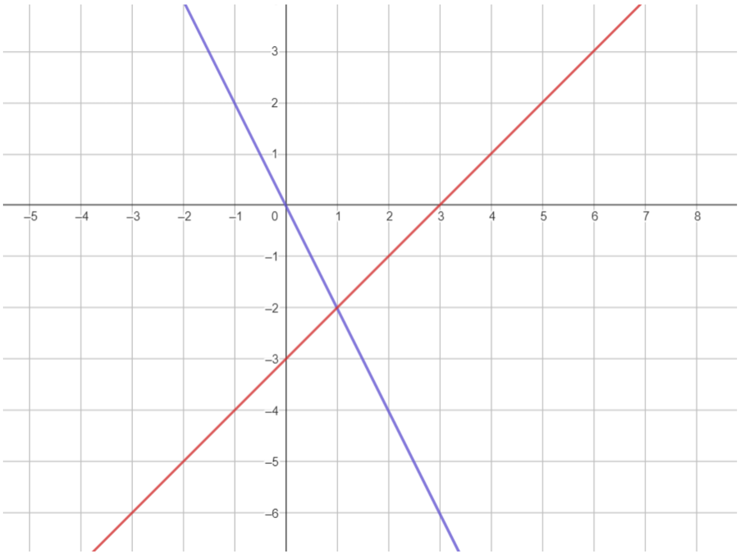
b) Falso

15-Verdadeiro ou falso: A solução de um sistema linear de 2 equações a 2 variáveis, corresponde aos pontos incomuns às retas relacionadas a elas.

a) Verdadeiro

b) Falso

16-A seguir está a representação gráfica das equações $2x + y = 0$ e $x - y = 3$.



A partir das retas, podemos afirmar que o sistema formado por essas duas equações tem:

a) 0 soluções

b) 1 solução

c) 4 soluções

d) Infinitas soluções

17-Qual a solução do sistema formado pelas equações representadas na questão anterior observando as retas formadas por elas?

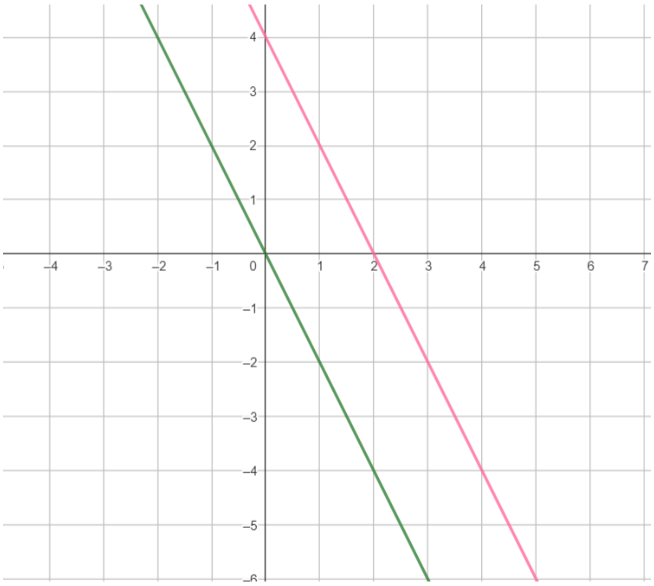
a) $x = 1\ e\ y = 2$

b) $x = 1\ e\ y = -2$

c) $x = -2\ e\ y = 1$

d) $x = -1\ e\ y = -2$

18- A seguir estão as retas que representam duas equações.



Podemos dizer que o sistema formado por essas duas equações é:

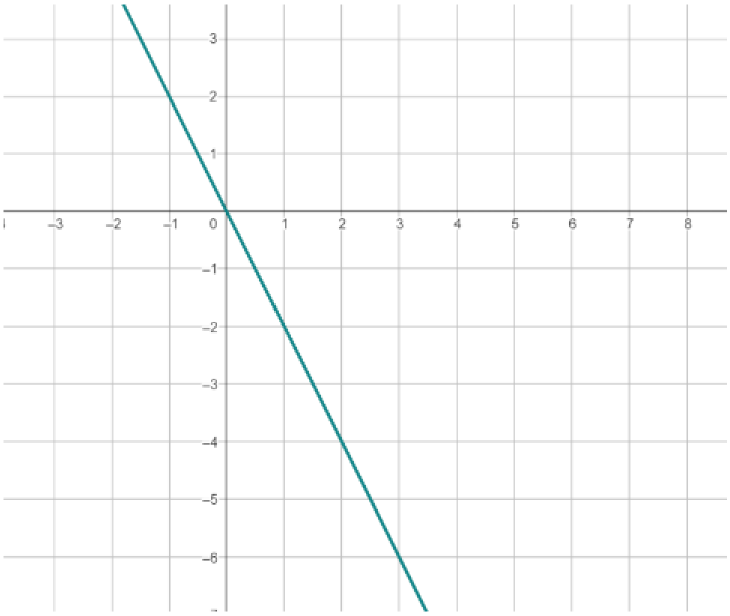
a) Possível determinado, já que tem uma única solução

b) Impossível, pois as duas retas são paralelas

c) Possível indeterminado, pois tem infinitas soluções

d) Nenhuma das alternativas

19-Veja a representação gráfica de um sistema linear 2×2, onde as retas representadas pelas duas equações são idênticas:



Esse é um sistema:

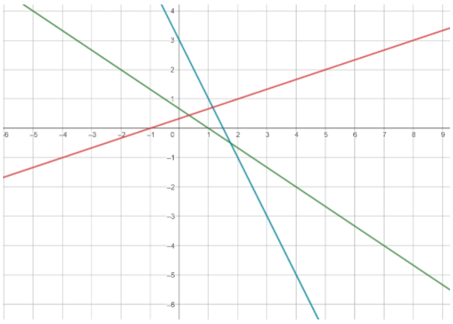
a) Impossível

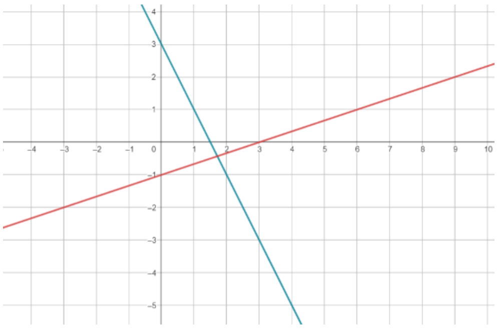
b) Possível determinado

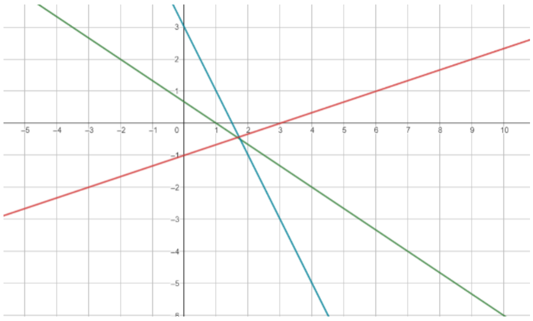
c) Possível indeterminado

d) Nenhuma das alternativas

20- Qual das seguintes representações se refere a um sistema impossível?

a) 

b) 

c) 

d) Todos são possíveis determinados.

21- Exercícios

1) Dado o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

Encontre os valores de x e y que satisfaçam o sistema e represente graficamente.

Solução:

Primeiramente vamos eliminar a incógnita y multiplicando a segunda linha por 2.

$$\begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ 3x + y = 8\ (2) \end{cases}$$

Isso resultará no seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ 6x + 2y = 16 \end{cases}$$

Somando ambas as equações obtermos o seguinte resultado para x.

$$(4x - 2y = -6) + (6x + 2y = 16) = 10x = 10$$

Disso temos que $x = 1$.

Para encontrar o valor de y, basta substituir o valor de x na primeira equação.

$$4x - 2y = -6$$

$$4.1 - 2y = -6$$

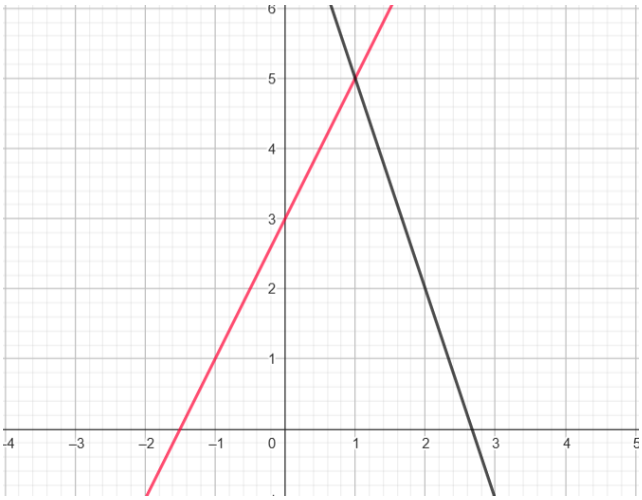
$$-2y = -6 - 4$$

$$y = \frac{-10}{-2}$$

Logo temos que $y = 5$.

Portanto a solução desse sistema é o par ordenado (1,5).

Representando graficamente temos:



2) (OBMEP – 2019) Em uma lanchonete, um pão de queijo, dois cachorros-quentes e um suco de laranja custam juntos R$ 31,00; já três pães de queijo, três cachorros-quentes e dois sucos de laranja custam juntos R$ 59,00. Qual é a diferença entre os preços de um cachorro-quente e de um pão de queijo?

a) R$ 1,00
b) R$ 1,50
c) R$ 2,00
d) R$ 2,50
e) R$ 3,00

Solução:

Primeiramente retiramos as informações que o enunciado nos fornece:

Para facilitar nossos cálculos, chamaremos o pão de queijo de P, o cachorro-quente de C, e o suco de S. tendo isso, vamos formar o sistema linear.

$$\begin{cases} P + 2C + S = 31 \\ 3P + 3C + 2S = 59 \end{cases}$$

A questão que saber qual é a diferença entre os preços de um cachorro-quente e de um pão de queijo, ou seja, $C - P = ?$

Como não precisamos da incógnita suco, uma ideia é realizar os cálculos para eliminar ela. Deste modo temos,

$$\begin{cases} P + 2C + S = 31(\times -2) \\ 3P + 3C + 2S = 59 \end{cases}$$

$$-2P - 4C - 2S = -62$$

Somando as duas equações temos:

$$-2P - 4C - 2S + 3P + 3C + 2S = -62 + 59$$

$$P - C = -3$$

Para deixar a equação da forma que precisamos, basta multiplicarmos ela por -1, assim será possível obter o resultado que se pede.

$$C - P = 3$$

Logo a diferença entre um cachorro-quente e um pão de queijo é de R$ 3,00.

3) Classifique o seguinte sistema linear usando a representação geométrica:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x - y = 6 \\ -x + y = 6 \end{cases}$$

Solução:

- **Primeira equação:** $y = -x$ (reta r)
- **Segunda equação:** $y = -2x - 6$ (reta s)
- **Terceira equação:** $y = x + 6$ (reta t)

Sabemos que, uma reta é definida por dois pontos, portanto basta determinar dois valores para x para encontrar o valor correspondente para y. Desta forma:

Tabela 1 – Pontos da reta *r*

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = -x}$	Ponto (x, y)
0	$y = -0 = 0$	(0, 0)
-6	$y = -(-6) = 6$	(-6, 6)

Fonte: Produção dos autores

Tabela 2 – Pontos da reta *s*

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = -2x - 6}$	Ponto (x, y)
-3	$y = -2 \times (-3) - 6 = -6$	(-3, 0)
-6	$y = -2 \times (-6) - 6 = 6$	(-6, 6)

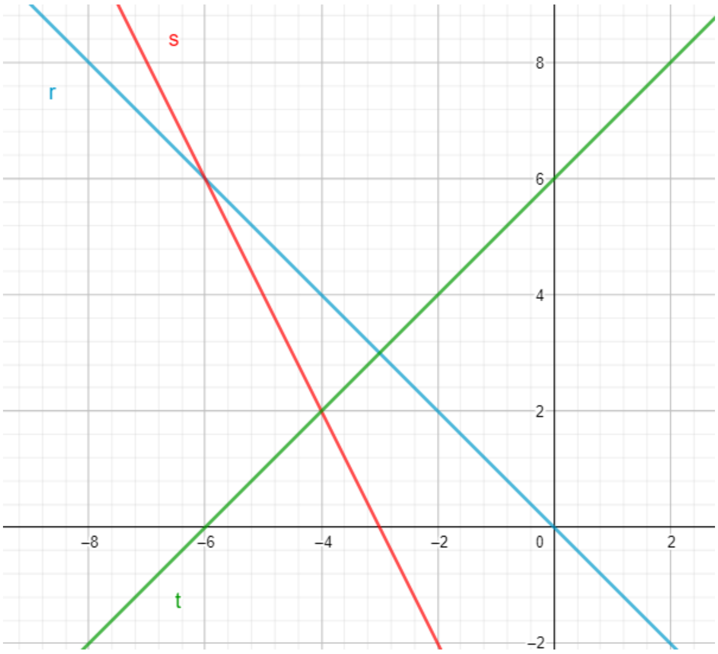
Fonte: Produção dos autores

Tabela 3 – Pontos da reta *t*

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = x + 6}$	Ponto (x, y)
0	$y = 0 + 6 = 6$	(0, 6)
-6	$y = -6 + 6 = 0$	(-6, 0)

Fonte: Produção dos autores

Figura 25 – Gráfico das retas *r, s* e *t*



Fonte: Produção dos autores

Observando o gráfico, verificamos que não há ponto de intersecção das três retas simultaneamente, portanto o sistema que elas representam é impossível.

Avaliação: A avaliação se desenvolverá no decorrer das aulas por meio de questões que vamos entregar aos alunos e depois realizar a correção das mesmas e a devolutiva.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Sistemas Lineares. In: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. Cap. 6. p. 109-123.

GUZMAN, Jefferson Huera (org.). **Sistemas de Equações pelo Método da Substituição**. Em Neurochipas Aprende Intuitivamente. Disponível em: https://br.neurochispas.com/algebra/sistemas-de-equacoes-pelo-metodo-da-substituicao/. Acesso em: 30 ago. 2024.

GUZMAN, Jefferson Huera (org.). **Sistemas de Equações pelo Método da Adição**. Em Neurochipas Aprende Intuitivamente. Disponível em: https://br.neurochispas.com/algebra/sistemas-de-equacoes-pelo-metodo-de-eliminacao/. Acesso em: 30 ago. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Sistemas lineares"; *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/sistemas-lineares.htm. Acesso em 16 de agosto de 2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. Sistemas Lineares. In: SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. São Paulo: Ftd, 2010. Cap. 6. p. 161-182.

Relatório Promat aula 4 – (21/09/2024)

No dia 21 de setembro de 2024, foi realizado o 4º encontro do Promat, contando com a presença de 22 alunos. Neste dia a aula estava programada para ser realizada em outro espaço. Inicialmente, esperamos a chegada dos alunos na sala de aula, para assim nos dirigirmos ao laboratório informática.

Ao chegarmos no laboratório que havia nos sido disponibilizado, notamos que havia 20 computadores disponíveis, além de que alguns estavam dando problema na inicialização, como por exemplo, não havia cabo HDMI que tem a função de transmitir a imagem do computador para a tela do monitor e outros que não acabavam não ligando. Estes imprevistos acabaram nos tomando 30 minutos da aula, mas no final das contas, para resolver tais problemas, utilizamos dos computadores que estavam funcionando normalmente e solicitamos que os alunos se sentassem em duplas para compartilhar de um computador. Outro fato a comentar que tivemos que pegar emprestado cadeiras de outra sala, para comportar todos os alunos.

Assim que tudo estava nos conformes, iniciamos a aula com slides dando partida ao conteúdo programado, falamos sobre a definição de uma equação linear, apresentando como é a escrita na forma geral e identificando seus elementos. Neste caso, são as incógnitas, os coeficientes e o termo independente da equação linear.

Dando sequência, trouxemos um exemplo numérico para facilitar a compreensão dos conceitos que havíamos explicado, em que notamos que os alunos participaram bastante, interagindo conosco positivamente e nos auxiliando a identificar os elementos presentes na equação dos exemplos utilizados.

Por conseguinte, abordamos o conteúdo de solução de um sistema, em que após a explicar e sanarmos as dúvidas, solicitamos que os alunos realizam uma atividade do material do aluno na *Software GeoGebra,* usado para criar e manipular objetos matemáticos de maneira dinâmica e interativa. Nesta aula, seu uso veio com o intuito dos alunos conseguir perceber de que maneira as equações se comportam ao serem inseridas em um plano cartesiano. Com esta ferramenta e a construção correta das equações, os alunos foram capazes de identificar e compreender seu funcionamento. Além do mais, conseguiram perceber que, quando o sistema tem solução ocorre uma interseção entre as retas construídas, onde é formando um ponto com coordenadas para x e para y, sendo então a solução deste sistema.

Após esta atividade, os alunos nos questionaram se tinha outros métodos para solucionar um sistema e aproveitando a pergunta, demos continuidade ao conteúdo com os métodos da adição e da substituição, mais em específico na solução de um sistema dois por dois. Desta forma, explicamos os conceitos e como realizar estes métodos. Em seguida trouxemos exemplos na lousa junto aos alunos dos quais estavam bem atentos e tiravam suas dúvidas quando elas surgiam. Após todas as perguntas serem respondidas foi designado aos alunos alguns exercícios pertinentes ao conteúdo recém lecionado, com o intuito de reforçar os conceitos e para uma melhor compreensão dos métodos.

Durante a volta do intervalo, tivemos dois alunos que foram embora antes do término da aula por conta que havia dentista marcado, e nestes casos devemos proceder solicitando sua assinatura e justificativa do motivo da saída com antecedência. Assim que todos retornaram e se acomodaram em suas cadeiras, retornamos com o conteúdo sobre a representação gráfica das equações lineares. Este tópico vem com o intuito de reforçar e explicar com mais clareza o comportamento das retas que foram construídas por meio do primeiro exercício que tinham realizado.

Desta forma, a explicação das representações gráficas, se deu por meio do GeoGebra, que, em conjunto dos alunos fomos inserindo as equações e explicado como a denominamos referente a cada caso, trazendo assim uma iteração mais dinâmica e participativa por parte dos alunos.

Dando sequência, logo após terem compreendido quando um sistema linear é possível determinado, possível indeterminado ou impossível, prosseguimos para a atividade do Kahoot, explicando brevemente, está plataforma trata-se de uma ferramenta de ensino interativa, baseada em jogos, amplamente utilizada em escolas e instituições de educação.

Os chamados “Kahoots” são quizzes de múltipla escolha que podem ser criados pelos usuários e acessados através do navegador ou pelo aplicativo oficial. Dada a explicação, utilizamos desta plataforma para criar um jogo para abordar todos os conceitos vistos nesta aula, com o intuito de recapitular e sanar possíveis dúvidas que haviam ficado.

Desta maneira, explicamos o funcionamento do Kahoot e solicitamos que acessassem a plataforma por meio do computador ou pelo próprio celular, e antes de iniciarmos o jogo, avisamos que em algumas perguntas haveria pegadinhas, portanto tinham que estar atentos. Assim que todos estavam inseridos no jogo, demos início as 14 perguntas propostas por nós.

No decorrer da atividade, como o aplicativo nos retorna à quantidade de erros e acertos, quando tinha perguntas que dois a três alunos acabavam errado, nós explicávamos o motivo de não ser aquela alternativa e caso necessário nos dirigíamos a lousa, para uma melhor compreensão.

Como dito anteriormente, que havia perguntas que a atenção seria maior por conta que havia pegadinhas, ocorreu que em uma das atividades tivemos que apenas um aluno acertou. Desta forma, explicamos qual era a pegadinha envolvida na questão e explicamos os motivos da alternativa estar errada.

Assim que encerramos a atividade, os alunos gostaram tanto que pediram se poderiam jogar mais uma vez, e por conta de nos ter sobrado 10 minutos, escolhemos em conjunto dos alunos um sobre a função do 1º grau, e funcionou da mesma forma que a anterior. Caso os alunos nos questionassem com dúvidas, nós explicávamos e seguia-se para a próxima. Contudo, encerrou-se a atividade e finalizou-se o encontro deste dia.

2.5 AULA 05 (28/09/2024) – PLANO DE AULA E RELATÓRIO

PLANO DE AULA 5 – (28/09/2024)

Fabrício Adriel Rustick
Maíri Poeta Castilho da Silva
Michelli Neves Lavagnoli
Milleni Ferreira de Souza

Público-Alvo: alunos do Ensino Médio
Tempo de execução: 4 horas-aula
Conteúdo: Sistemas Lineares
Objetivo Geral: Solucionar e discutir um sistema linear
Objetivos Específicos: Ao se trabalhar com sistemas lineares, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Classificar um Sistema Linear;
- Identificar um sistema linear homogêneo;
- Compreender e aplicar o Escalonamento ou eliminação Gaussiana;
- Compreender e aplicar Regra de Crammer.

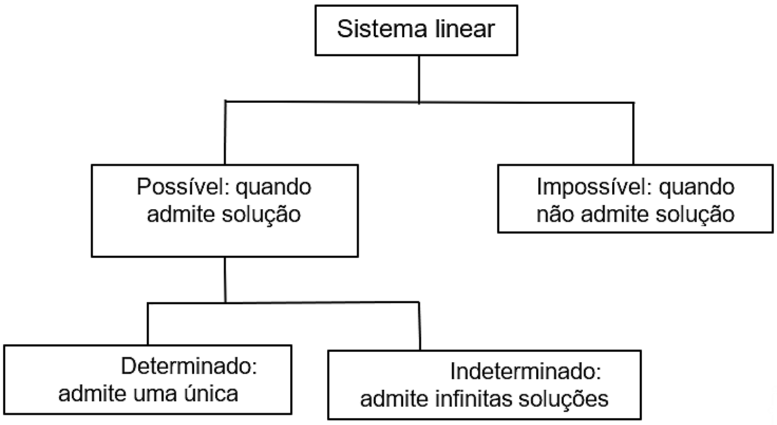
Recursos Didáticos: Quadro, giz, computador, retroprojetor, slides e folhas de sulfite.

Encaminhamento metodológico:

1- Classificação de um Sistema linear (30min)

Os sistemas lineares são classificados quanto ao número de soluções da seguinte forma:

Figura 26 – Diagrama sistema linear



Fonte: Produção dos autores

Quando um sistema linear $n \times n$ é possível e determinado (SPD), o determinante D da matriz incompleta é diferente de 0.

Quando um sistema linear $n \times n$ é possível indeterminado (SPI) ou impossível (SI), o determinante da matriz incompleta é igual a zero.

Exemplos:

a) O sistema $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

É sistema possível e determinado, pois: $D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11$, e 11 é diferente de zero.

b) O sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

Não é sistema possível e determinado, pois $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Distinguiremos os casos SPI e SI, analisando se há ou não incompatibilidade das equações do sistema.

Nesses casos, o sistema será possível indeterminado se todas as equações dizem a mesma coisa ou são múltiplas umas das outras, mas se houver alguma contradição nas equações o sistema será impossível.

Se analisarmos o exemplo b) podemos perceber que a segunda equação é exatamente a primeira multiplicada por dois, como essas duas equações são múltiplas uma da outra esse sistema é possível indeterminado, admite infinitas soluções.

c) O sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$

Não é sistema possível e determinado, pois $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Se dividirmos a segunda equação por dois, temos: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$

O que é uma contradição, portanto esse sistema é impossível.

d) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ \quad x + y - z = 0 \end{cases}$

Perceba que nesse caso não podemos utilizar a técnica de analisar o valor do determinante, uma vez que não temos uma matriz quadrada. Analisando as equações desse sistema conseguimos perceber que uma não é múltipla da outra, e que ao resolvê-lo temos $x = 1, y = 2 \; e \; z = 3$. Portanto se trata de um sistema possível determinado.

Exercício para os alunos:

1- Classifique os seguintes sistemas como sistema possível determinado, possível indeterminado ou impossível:

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$

Solução:

Não é SPD, pois $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$, e como a segunda equação pode ser escrita como a primeira multiplicada por dois, o sistema admite infinitas soluções, portanto é SPD.

b) $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

Solução:

É SPD, pois $D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -2$

c) $\begin{cases} x + y + 2z = -10 \\ 3x + 3y + 6z = 9 \end{cases}$

Solução:

Nesse caso, como a matriz não é quadrada não podemos calcular o determinante para verificar se é ou não SPD, porém se observarmos, ao dividir a segunda equação por três temos: $\begin{cases} x + y + 2z = -10 \\ \quad x + y + 2z = 3 \end{cases}$ o que é uma contradição, portanto esse sistema é impossível (SI).

2- Sistema Lineares Homogêneos (30min)

Denomina-se sistema linear homogêneo aquele em que todas as equações lineares são homogêneas.

Sistema Linear homogêneo é aquele em que os termos independentes de todas as equações valem zero. Assim, o sistema:

$$s\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ É homogêneos

Sistemas que admitem sempre a solução 4$(\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_n)$ em que $\propto_i = 0, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, é chamado de solução nula, trivial ou imprópria. Portanto um sistema linear homogêneo é sempre possível. Se o sistema linear homogêneos for determinado, apresentará apenas uma solução (a nula), e se for indeterminado apresentará, além da solução nula, outras soluções não nulas, também chamadas de soluções próprias.

Exemplo de sistema linear homogêneo:

$$s\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 2y - 6z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

Além de admitir a solução trivial $(0,0,0)$, esse sistema admite solução não triviais como, por exemplo, $(-4,3,-1)$.

$$S'\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 5y - 13z = 0 \end{cases}$$

Como S' tem duas equações e três incógnitas, segue-se que este é possível e indeterminado.

Para resolvê-lo, consideramos a variável livre z, à qual atribuímos o valor arbitrário $\propto \in R$. Assim, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3\propto \quad (1) \\ 5y = 13\propto \quad (2) \end{cases}$$

$$(2)y = \frac{13 \propto}{5}$$

Em (1) $x + \frac{13\propto}{5} = 3 \propto \Longrightarrow x = \frac{2\propto}{5}$

E as soluções do sistema são constituídas pelas triplas ordenadas da forma $\left(\frac{2\propto}{5}; \frac{13\propto}{5}; \propto\right)$ em que $\propto \in R$.

Observemos que, para $\propto = 0$, obtemos a solução nula do sistema, (0,0,0)

Exemplo:

Calcule o valor de m para o sistema $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + mz = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ tenha somente a solução trivial.

Resolução: Para que o sistema tenha somente a solução trivial, isto é, seja determinado, é necessário que Δ$\neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 = m - 1 - 1 + m + 1 = 2m - 2$$

$$\Delta = 2m - 2 \neq 0 \rightarrow m \neq 1$$

$$s = \{m \in \mathbb{R}/m \neq 1\}$$

3- Forma Matricial (50 min)

A informação essencial de um sistema linear pode ser representada de forma compactada por meio de um arranjo retangular chamado Matriz. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$$

Podemos formar uma matriz com os coeficientes de cada variável alinhados em colunas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Essa matriz é chamada matriz dos coeficientes (ou matriz associada) do sistema é a matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Ela é conhecida como matriz aumentada do sistema. Uma matriz aumentada de um sistema consiste na matriz dos coeficientes, com uma coluna adicional que contém as constantes à direita do sinal de igualdade nas respectivas equações.

O tamanho de uma matriz informa quantas linhas e colunas a matriz tem. A matriz aumentada acima possui duas linhas e 3 colunas e é chamada uma matriz 2X3. Se m e n forem inteiros positivos, uma matriz mxn será um arranjo retangular de números com m linhas e n colunas.

Eliminação Gaussiana ou Escalonamento

A **eliminação gaussiana**, também conhecida como **escalonamento**, é um método para resolver sistemas lineares. Este método consiste em manipular o sistema através de determinadas operações elementares, transformando a matriz estendida do sistema em uma matriz triangular (chamada de **matriz escalonada do sistema**). Uma vez triangularizado o sistema, a solução pode ser obtida via substituição regressiva. Naturalmente estas operações elementares devem preservar a solução do sistema e consistem em:

1. multiplicação de uma linha por uma constante não nula.
2. substituição de uma linha por ela mesma somada a um múltiplo de outra linha.
3. permutação de duas linhas.

Exemplo:

Resolva o sistema pelo método de eliminação gaussiana:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x + 4y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Solução:

A matriz ampliada do sistema é escrita como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

No primeiro passo, subtraímos da segunda linha o quádruplo da primeira e subtraímos da terceira linha o dobro da primeira linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

No segundo passo, permutamos a segunda linha com a terceira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Neste momento, a matriz já se encontra na forma triangular (também chamada de matriz escalonada do sistema). Da terceira linha, encontramos $-2z = -2$, ou seja, $z = 1$. Substituindo na segunda equação, temos $-y - 3z = -2$, ou seja, $y = -1$ e finalmente, da primeira linha, $x + y + z = 1$, resulta em $x = 1$.

Exercício

1- Resolva o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 10z = -48 \\ 10y + z = 25 \end{cases}$$

Solução:

Primeiramente devemos colocar o sistema em sua matriz ampliada e em seguida realizar as operações elementares para resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & -48 \\ 0 & 10 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

Vamos multiplicar a linha 2 por (-1) e em seguida subtrair a linha 2 com a linha 1 e manter na linha 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -48 \\ 0 & 10 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

Agora vamos multiplicar a linha 2 por (-10) e em seguida subtrair a linha 3 com a linha 2 e manter na linha 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -48 \\ 0 & 0 & 91 & -455 \end{pmatrix}$$

Voltando a matriz ao sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + 9z = -48 \\ 91z = -455 \end{cases}$$

Da equação 3, obtemos:

$$91z = -455$$

$$z = \frac{-455}{91}$$

$$z = -5$$

Da equação 2, obtemos:

$$-y = -48 - 9z$$

$$-y = -48 - 9(-5)$$

$$-y = -48 + 45$$

$$-y = -3$$

$$y = 3$$

E da equação um, obtemos:

$$x = -y - z$$
$$x = -3 - (-5)$$
$$x = -3 + 5$$
$$x = 2$$

Logo, a solução desse sistema é $(2,3,-5)$.

4- Regra de Crammer (50min)

A regra de Crammer pode ser aplicada a qualquer sistema $n \times n$ (com n equações e n incógnitas) com $D \neq 0$. Nesse caso, o sistema é considerado possível e determinado.

Utilizamos a regra de Crammer da forma exemplificada a seguir.
- Dado o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5 - 2(x + y) = -3 \\ 1 + 3(y - x) = 7 \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema temos:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

A fórmula que utilizamos para a regra de Crammer é:

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ e } y = \frac{D_y}{D}$$

Onde:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ ; } D_x = \begin{vmatrix} k_1 & b \\ k_2 & d \end{vmatrix} \text{ e } D_y = \begin{vmatrix} a & k_1 \\ c & k_2 \end{vmatrix}$$

Em que: a, b, c e d são os coeficientes que multiplicam x e y e k_1 e k_2 são as constantes

Neste exemplo temos:

- Na primeira linha do sistema $a = 1, b = 1 \ e \ k_1 = 4$
- Na segunda linha do sistema $c = 1, d = -1 \ e \ k_2 = -2$

Desta forma ao identificar, calculamos os determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Com isso,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ e } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1,3)\}$.

5- Trinca dos Sistemas Lineares (40min)

Composição do jogo: 42 peças.
Participantes: Em duplas.

Regras do Jogo:

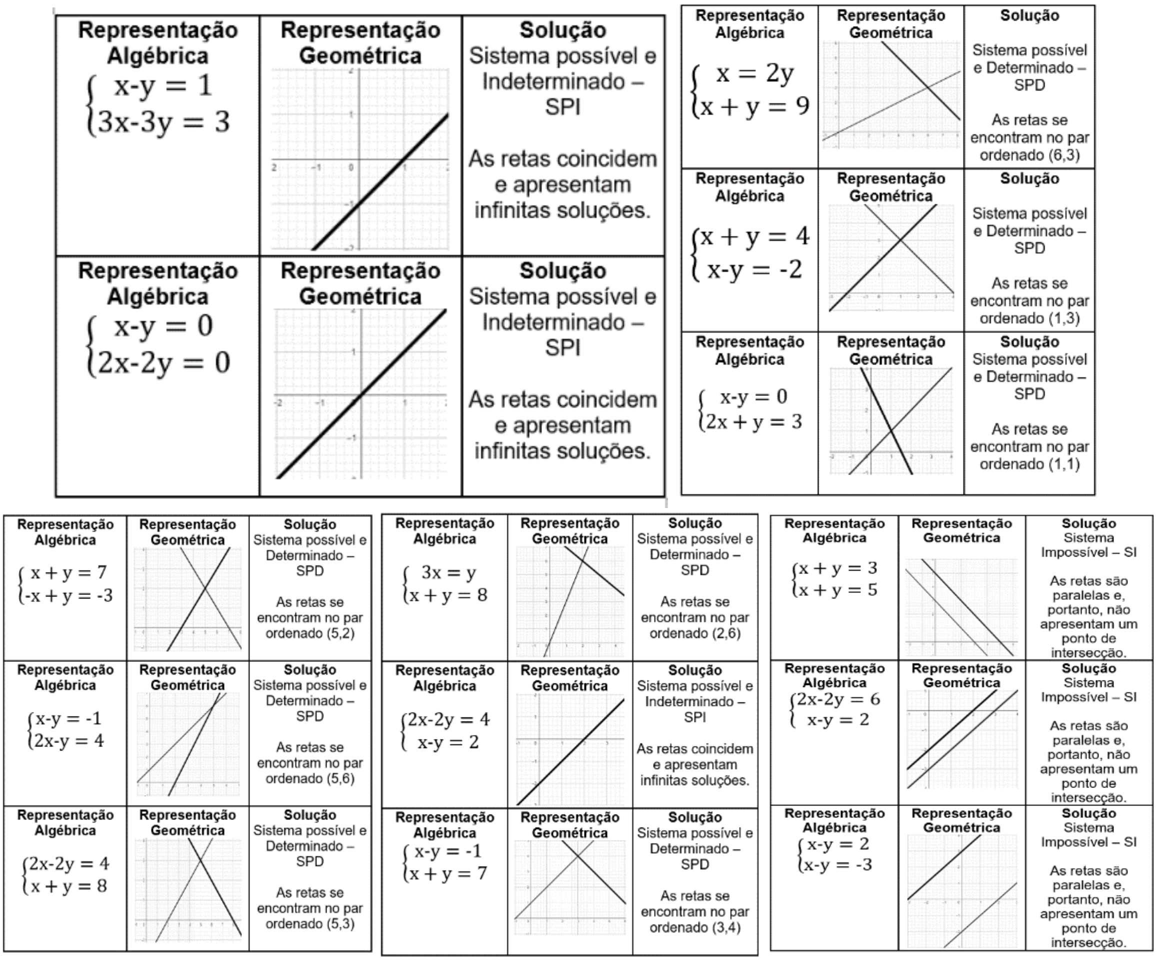
- Reúnam-se em duplas e tirem par ou ímpar para ver quem inicia o jogo.
- Embaralhem as cartas e distribuam seis cartas para cada participante. O restante das cartas comporá o monte de cartas no centro da mesa.
- O(A) primeiro(a) participante compra uma carta do monte e descarta uma carta para o “lixo”. Ele(a) pode optar por descartar a carta comprada ou ficar com ela e descartar uma das cartas que tinha em mãos.
- O(A) participante seguinte escolhe entre pegar uma carta do monte ou pegar a carta descartada pelo(a) colega. Caso ele(a) opte por pegar uma carta do lixo, só pode escolher a que está por cima, ou seja, não é permitido escolher uma carta entre as que estiverem no lixo.
- O objetivo dos(as) participantes é organizar suas cartas de maneira a formar trincas, cada uma com a mesma representação algébrica de um sistema linear,

representação geométrica e tipo de solução. À medida que forem formando essas trincas, os(as) participantes podem colocá-las sobre a mesa.

- O curinga pode substituir qualquer uma das cartas. Em uma trinca, apenas um curinga pode ser colocado. Vence o jogo quem primeiro montar duas trincas.

Peças do jogo:

Figura 27 – Cartas do jogo: Trinca dos sistemas lineares



Fonte: FABRO, Rafaela (2021)

6- Exercícios:

1- Determine o valor de a, para que o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{ax - 2y = 1} \\ \boldsymbol{4x + 3y = 2} \end{cases}$ seja possível e determinado.

Para que o sistema tenha uma única solução, vimos que o determinante da matriz dos coeficientes não deve ser zero.

A matriz dos coeficientes será: $A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

O determinante dessa matriz é dado por: $\det(A) = a \cdot 3 - (-2) \cdot 4 = 3a + 8$

Para que o sistema seja possível e determinado, o determinante não deve ser zero. Portanto, temos a condição: $3a + 8 \neq 0$

Resolvendo a desigualdade para a:

$$3a + 8 = 0$$

$$3a = -8$$

$$a = -\frac{8}{3}$$

Então, para que o sistema seja possível e determinado, o valor de a não deve ser $-\frac{8}{3}$.

2- Verifique se a solução do sistema abaixo é (-7, 5, 3).

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

Solução:

Podemos resolver esse exercício apenas substituindo os valores dos pontos e verificando se as equações são satisfeitas ou fazer o escalonamento e chegar a um resultado.

Fazendo a substituição temos:

$$-7 + 2(5) - 3 = 0$$

$$2(-7) - 5 + 3(3) = -10$$

$$3(-7) + 3(5) - 2(3) = -12$$

Logo, essas coordenadas não são solução do sistema.

Fazendo o escalonamento:

Primeiramente devemos colocar o sistema em sua matriz ampliada e em seguida realizar as operações elementares para resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vamos multiplicar a linha 1 por (-2) e em seguida somar a linha 1 e a linha 2 e manter na linha 2. (l2+2l1 em l2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Agora vamos multiplicar a linha 1 por (-3) e em seguida somar a linha 1e a linha 3 e manter na linha 3. (l3-3l1 em l3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Agora vamos multiplicar a linha 2 por ($\frac{3}{5}$) e em seguida subtrair a linha 2 e a linha 3 e manter na linha 3. (l3-($\frac{3}{5}$)l2 em l3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Voltando a matriz ao sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -5y + 5z = 5 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

Da equação 3, obtemos:

$$-2z = -6$$

$$z = \frac{-6}{-2}$$

$$z = 3$$

Da equação 2, obtemos:

$$-5y = 5 - 5z$$
$$-5y = 5 - 5(3)$$
$$-5y = 5 - 15$$
$$-5y = -10$$
$$y = \frac{-10}{-5}$$
$$y = 2$$

E da equação um, obtemos:

$$x = 2 - 2y + z$$
$$x = 2 - 2(2) + 3$$
$$x = 2 - 4 + 3$$
$$x = 1$$

Logo, a solução desse sistema é $(1,2,3)$.

3- Encontre a solução do sistema abaixo e diga se ele é SPD, SPI ou SI:

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 3 \\ -x + 3y + z = -10 \\ 3x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

Solução:

Primeiramente devemos colocar o sistema em sua matriz ampliada e em seguida realizar as operações elementares para resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Vamos multiplicar a linha 1 por $(-\frac{1}{2})$ e em seguida subtrair a linha 2 da linha 1 e manter na linha 2. (l2-$(-\frac{1}{2})$l1 em l2)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{17}{2} \\ 3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Agora vamos multiplicar a linha 1 por ($\frac{3}{2}$) e em seguida subtrair a linha 3 da linha 1 e manter na linha 3. (l3 - ($\frac{3}{2}$) l1 em l3)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{17}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 4 & \frac{-13}{2} \end{pmatrix}$$

Agora vamos multiplicar a linha 2 por ($\frac{7}{5}$) e em seguida subtrair a linha 3 da linha 2 e manter na linha 3. (l3 - ($\frac{7}{5}$)l2 em l3)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} & \frac{27}{5} \end{pmatrix}$$

Voltando a matriz ao sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 3 \\ \frac{5}{2}y - z = -\frac{17}{2} \\ \frac{27}{5}z = \frac{27}{5} \end{cases}$$

Da equação 3, obtemos:

$$\frac{27}{5}z = \frac{27}{5}$$

$$z = \frac{27}{5} \times \frac{5}{27}$$

$$z = 1$$

Da equação 2, obtemos:

$$\frac{5}{2}y = -\frac{17}{2} + z$$

$$\frac{5}{2}y = -\frac{17}{2} + 1$$

$$\frac{5}{2}y = -\frac{15}{2}$$

$$y = -\frac{15}{2} \times \frac{2}{5}$$

$$y = -\frac{30}{10}$$

$$y = \ -3$$

E da equação um, obtemos:

$$2x = 3 + y + 4z$$

$$2x = 3 - 3 + 4$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

Logo, a solução desse sistema é $(2, -3, 1)$ e esse sistema é possível e determinado.

4- Calcule o valor de a para que o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{ax + y = 0} \\ \boldsymbol{ax + ay = 0} \end{cases}$ tenha solução diferentes da trivial.

Solução:

Para ter soluções diferentes da trivial o sistema tem que ser possível e indeterminado, isto é $\Delta = 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1)$$

$$\Delta = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow a = 1$$

Portanto {0,1}

5- Aplicando a regra de Crammer, resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -9,\ D_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -27,\ D_y = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -63$$

Com isso,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-27}{-9} = 3 \text{ e } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-63}{-9} = 7$$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(3, 7)\}$

Avaliação: A avaliação se desenvolverá no decorrer das aulas por meio de questões que vamos entregar aos alunos e depois realizar a correção das mesmas e a devolutiva.

REFERÊNCIAS

CHIAPINOTTO, Elisia Lorenzoni; LUTZ, Mauricio Ramos. **Caderno didático 4**: resolução de sistemas de equações lineares. Santa Maria: Sn, 2003. 28 p. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/705121/2/4%20SII%20Sistemas%20lineares.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

DAGOBERTO ADRIANO RIZZOTTO JUSTO. Recursos Educacionais Abertos de Matemática - REAMAT (org.). **Eliminação Gaussiana**. 2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-sci/sdsl-eliminacao_gaussiana.html. Acesso em: 07 set. 2024.

FABRO, Rafaela. **Docero Brasil**: trinca dos sistemas lineares. Trinca dos Sistemas Lineares. 2021. Disponível em: https://doceru.com/doc/eenc510. Acesso em: 6 set. 2024.

LAY, David C. Equações Lineares na Álgebra Linear: sistemas de equações lineares. In: LAY, David C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2024. p. 2-9. Tradução de: Linear algebra and its applications.

Relatório Promat aula 5 – (28/09/2024)

No dia 28 de setembro de 2024, foi realizado o 5º encontro do Promat, contando com a presença de 17 alunos. Iniciamos a aula perguntando aos alunos sobre a disposição das carteiras na sala, sugerindo que formassem uma meia lua, permanecessem em seus lugares ou viessem mais para frente, por conta que muitos dos alunos estavam sentados de maneira dispersa e no fundo da sala. Após a reorganização, demos início a correção dos exercícios propostos na aula anterior, com a maioria dos alunos tendo realizado as atividades. Para o primeiro exercício, uma aluna prontificou-se a resolver no quadro, e assim ela deu início à resolução de um sistema linear.

Dando sequência, o estagiário Maíri explicou o passo a passo do exercício na lousa e desenhou o gráfico correspondente ao sistema. Desta forma, ele aproveitou a oportunidade para revisar os conceitos de sistemas possíveis determinados, possíveis e indeterminados e sistema impossíveis, utilizando a representação gráfica para reforçar o entendimento dos alunos.

Em seguida, a estagiária Michelli conduziu a correção da segunda questão da lista. Após realizar a leitura do enunciado e a retirada dos principais dados do problema, um dos alunos sugeriu uma estratégia da resolução simplificado. Ele destacou que, como o dobro de um valor seria 62 e o outro valor era 59, a diferença seria 3 reais, para melhor entendimento da ideia do aluno, a questão proposta foi
“Em uma lanchonete, um pão de queijo, dois cachorros-quentes e um suco de laranja custam juntos R$ 31,00; já três pães de queijo, três cachorros-quentes e dois sucos de laranja custam juntos R$ 59,00. Qual é a diferença entre os preços de um cachorro-quente e de um pão de queijo?”(OBMEP – 2019). A ideia do aluno foi muito boa, e concordamos com a abordagem, explicando o desenvolvimento completa da resolução para que todos compreendessem.

Ao abordar a terceira questão, o estagiário Maíri desenhou um plano cartesiano no quadro e perguntou quantos pontos seriam necessários para formar uma reta. Os alunos responderam corretamente: “dois pontos”. Durante a explicação, a maioria dos alunos estavam atentos, embora alguns demonstrassem sinais de cansaço e não participassem ativamente, mas ainda assim acompanhavam as explicações. Após encontrar todos os valores de y solicitados no exercício, escolhemos pontos para o eixo x, resolvemos na equação e representamos graficamente no plano cartesiano os pontos obtidos. Dando sequência, foi perguntado se o sistema era possível, e os alunos responderam que não, o que nos permitiu revisar novamente os tipos de sistemas.

Neste encontro, relembramos os conceitos das classificações dos sistemas, se o sistema é possível e determinar, possível e indeterminado e impossível, associandoos desta ao cálculo do determinante da matriz ampliada. Ao demonstrar um exemplo, questionamos os alunos sobre como se calcula o determinante de uma matriz 2x2, e apenas uma aluna respondeu corretamente, indicando que se deve multiplicar a diagonal principal e subtrair a multiplicação da diagonal secundária.

Durante a explicação do estagiário Fabrício, o estagiário Maíri auxiliou individualmente os alunos que apresentavam dificuldades. Quando abordávamos um sistema 2x3, houve um período de dispersão na sala, com os alunos começando a conversar e usar o celular. Para retomar o foco, o estagiário Fabrício substituiu os valores nas equações, mas a turma continuava dispersa, sendo necessário mais de um estagiário intervir para chamar a atenção dos alunos. Após o ajuste, uma aluna auxiliou na substituição dos valores durante a explicação.

Enquanto os alunos resolviam os exercícios, os estagiários Fabrício e Maíri tentaram solucionar um sistema anterior que havia causado dificuldades. Demos 15 minutos para que todos completassem os exercícios e, em seguida, o estagiário Fabrício corrigiu cada um, explicando passa a passo. Durante esse processo, os professores circulavam pela sala para auxiliar na compreensão do cálculo do determinante da matriz.

Ao retornar do intervalo, tivemos um breve contratempo, pois alguns alunos demoraram a retornar para a sala, atrasando o início em cerca de 10 minutos. Aproveitamos esse tempo para realizar uma atividade descontraída, como o jogo da forca, para manter o engajamento. Iniciamos o próximo conteúdo mesmo com a ausência de três alunos.

Por conseguinte, abordamos sistemas lineares homogêneos, com os alunos participando ativamente na resolução dos exemplos. Uma aluna manifestou dúvida na transição de variáveis, o que nos levou a explicar novamente do passo anterior. Para manter a atenção da turma, a estagiária Michelli utilizou uma dinâmica, pedindo que os alunos que estivessem acompanhando batessem palmas, retomando a atenção dispersa. A partir daí, explicamos a forma matricial e o processo de escalonamento, alertando para a importância de não se confundirem.

Para reforçar a explicação, foi introduzido um exemplo de um sistema 3x3. Enquanto estávamos demonstrando, uma aluna comentou que considerava o método difícil, mas se manteve atenta. Em determinado momento, a aluna perguntou onde estava localizada a linha dois da matriz, e a professora indicou visualmente no quadro.

O estagiário Maíri auxiliou a estagiária Michelli apresentando o conteúdo de forma alternativa, ajudando a esclarecer as dúvidas. Os alunos foram bem participativos na solução dos exercícios. Por exemplo, um aluno comentou sobre a necessidade de multiplicar a linha por 2, contribuindo para o avanço da solução. Ao notar que alguns ainda não haviam compreendido, o estagiário Maíri reformulou a explicação, resultando em uma melhor compreensão por parte de todos.

Para consolidar o aprendizado, pedimos aos alunos que formassem grupos de até 5 pessoas para participar do jogo “A Trinca dos Sistemas Lineares”. Devido ao tempo limitado, decidimos não explorar a Regra de Cramer, garantindo mais tempo para a atividade lúdica.

2.6 AULA 06 (05/10/2024) – PLANO DE AULA E RELATÓRIO

PLANO DE AULA 6 – (05/10/2024)

Fabrício Adriel Rustick
Maíri Poeta Castilho da Silva
Michelli Neves Lavagnoli
Milleni Ferreira de Souza

Público-Alvo: alunos do Ensino Médio
Tempo de execução: 4 horas-aula
Conteúdo: plano cartesiano; distância entre dois pontos; ponto médio de um segmento; equação geral e reduzida da reta; posição relativa entre duas retas no plano.
Objetivo Geral: Que os alunos sejam capazes de utilizar o plano cartesiano, localizando pontos, segmentos de retas e retas. Fazer a equação geral e reduzida de uma reta a partir de dois pontos ou de um ponto e do coeficiente angular.
Objetivos Específicos:

Ao ministrar as aulas objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- identificar os elementos de um plano cartesiano;
- localizar pontos no plano cartesiano; construir segmento de reta;
- calcular o ponto médio de um segmento;
- obter a equação geral e reduzida de uma reta a partir de dois pontos;

- compreender o significado do coeficiente angular de uma reta e utilizar esse conceito na resolução de problemas;
- diferenciar retas paralelas, concorrentes, coincidentes e perpendiculares no plano;
- deduzir a equação geral e reduzida da circunferência;
- reconhecê-las, bem como construir o gráfico.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, computador, retroprojetor, slides, folha sulfite, plano cartesiano gigante.

Encaminhamento metodológico:

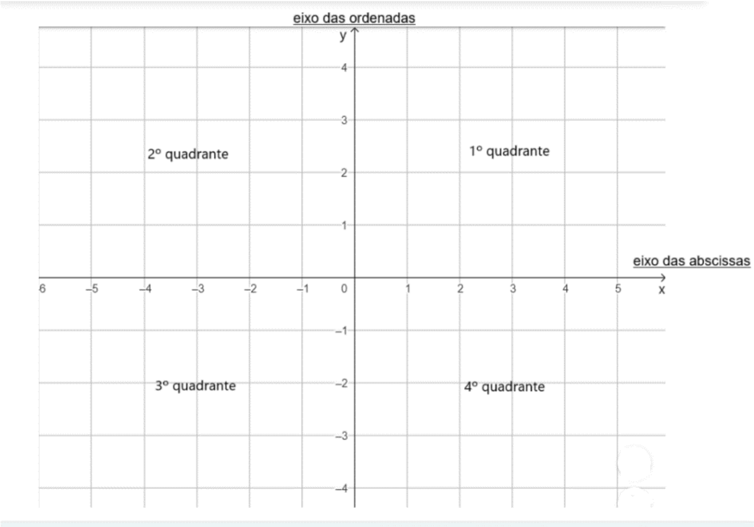
Vamos iniciar a aula organizando os alunos em grupos de até cinco membros, em seguida as carteiras serão afastadas e iremos estender o plano cartesiano gigante no meio da sala. A intenção é que essa aula seja realizada com o auxílio do plano cartesiano, onde os alunos irão realizar os exemplos com seu auxílio.

1- Definição do plano cartesiano (15min)

O plano cartesiano consiste em um plano com dois eixos perpendiculares, x e y, que o dividem em quatro regiões. O horizontal x é denominado **eixo das abscissas**, e o vertical y, **eixo das ordenadas**. O ponto em que esses eixos se cruzam é denominado **origem**.

Os eixos do plano cartesiano dividem esse plano em quatro quadrantes, numerados no sentido anti-horário conforme a figura abaixo. Nesse momento vamos mostrar os quadrantes utilizando o plano cartesiano gigante que estará estendido no meio da sala de aula.

Figura 28 – Quadrantes do plano cartesiano



Fonte: Produção dos autores

Para representar um ponto P em um plano cartesiano, utilizamos as coordenadas cartesianas, que consistem em um par ordenado (a, b), em que a é abscissa, e b, a ordenada do ponto.

Condições para que um ponto $P(a, b)$ pertença a cada quadrante:

1º quadrante: $a \geq 0 \; e \; b \geq 0$;

2º quadrante: $a \leq 0 \; e \; b \geq 0$;

3º quadrante: $a \leq 0 \; e \; b \leq 0$;

4º quadrante: $a \geq 0 \; e \; b \leq 0$.

Exemplo:

Determine a que quadrante pertence cada um dos seguintes pontos e em seguida os represente no plano cartesiano: $A(3, -2); B(-3, 1), C(4, 2) \; e \; D(-2, -3)$.

No ponto A, $a \geq 0 \; e \; b \leq 0$, portanto pertence ao 4º quadrante;

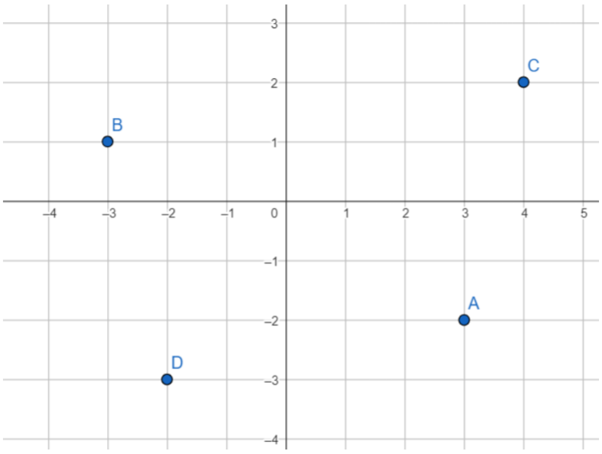
No ponto B, $a \leq 0 \; e \; b \; \geq 0$, portanto pertence ao 2º quadrante;

No ponto C, $a \geq 0 \; e \; b \geq 0$, portanto pertence ao 1º quadrante;

No ponto D, $a \leq 0 \; e \; b \leq 0$, portanto pertence ao 3º quadrante.

Representação desses pontos no plano cartesiano:

Figura 29 – Representação do ponto no plano cartesiano



Fonte: Produção dos autores

2- Distância entre dois pontos (25min)

Fixando uma unidade de medida de comprimento, indicamos a distância entre dois pontos A e B por AB.

Quando a reta que contém dois pontos, $A(a_1, b_1)$ e $B(a_2, b_2)$, é paralela ao eixo das abscissas, podemos calcular a distância entre eles pela expressão $AB = |a_2 - a_1|$.

Quando a reta que contém dois pontos, $A(a_1, b_1)$ e $B(a_2, b_2)$, é paralela ao eixo das ordenadas, podemos calcular a distância entre eles pela expressão $AB = |b_2 - b_1|$.

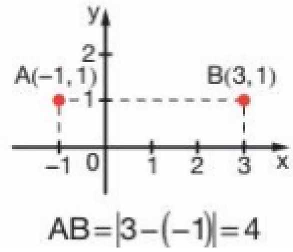
Exemplo:

Calcular a distância entre os seguintes pontos:

a) $A(-1, 1)\ e\ B(3, 1)$.

Solução:

Figura 30 – Cálculo da distância dos pontos A (-1,1) e B (3,1)

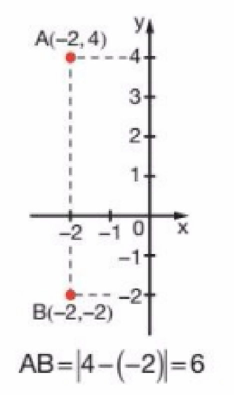


Fonte: Acervo dos autores

b) $A(-2,4)\ e\ B(-2,-2)$.

Solução:

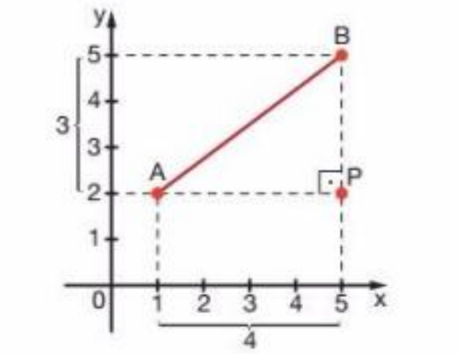
Figura 31 – Cálculo da distância dos pontos A (-2,4) e B (-2,-2)



Fonte: Acervo dos autores

Para determinar a distância entre dois pontos cuja reta que os contém não é paralela ao eixo x ou ao eixo y, utilizamos o Teorema de Pitágoras. Observe, por exemplo, como determinar a distância entre os pontos $A(1,2)\ e\ B(5,5)$.

Figura 32 – Cálculo da distância entre dois pontos com o Teorema de Pitágoras



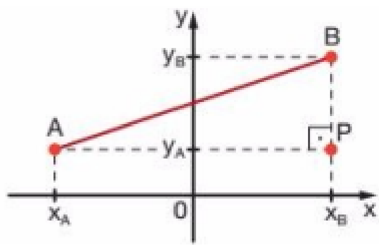
Fonte: Acervo dos autores

Note que o ΔABP é retângulo em P, $AP = |5 - 1| = 4$ e $BP = |5 - 2| = 3$. Utilizando o Teorema de Pitágoras no ΔABP, temos:

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow (AB)^2 = 25 \Rightarrow AB = \sqrt{25} \Rightarrow AB = 5$$

Deduziremos uma fórmula por meio da qual seja possível calcular a distância entre dois pontos quaisquer. Para isso, considere os pontos $A(x_A, y_A) e\ B(x_B, y_B)$ em um plano cartesiano.

Figura 33 – Dedução da fórmula do cálculo da distância entre dois pontos



Fonte: Acervo dos autores

Como $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao eixo x e $\overleftrightarrow{BP}$ é paralela ao eixo y, temos que $AP = |x_B - x_A|$ e $BP = |y_B - y_A|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔABP, temos:

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 \Rightarrow (AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemplo:

Distância entre os pontos $A(7, -3)$ e $B(-5, 2)$:

$$AB = \sqrt{(-5-7)^2 + \left(2-(-3)\right)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} \Rightarrow AB = \sqrt{144+25}$$

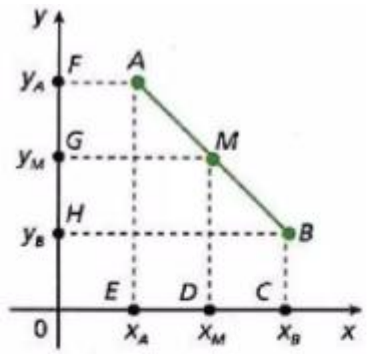
$$\Rightarrow AB = \sqrt{169} \rightarrow AB = 13$$

3- Ponto médio de um segmento (30min)

Para resolver alguns tipos de problema, precisamos dividir um segmento em outros dois de mesma medida. Vamos, então, aprender como determinar o ponto médio de um segmento no plano cartesiano.

Considere um segmento de extremos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ cujo ponto médio é $M(x_M, y_M)$.

Figura 34 – Ponto médio entre dois pontos



Fonte: Acervo dos autores

Pelo teorema de Tales, encontramos a seguinte relação entre as abscissas desses pontos:

$$AM = MB \Rightarrow ED = DC \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_m = x_B + x_A$$

Portanto:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Também pelo teorema de Tales, encontramos a seguinte relação entre as ordenadas desses pontos:

$$BM = MA \Rightarrow HG = GF \Rightarrow y_M - y_B = y_A - y_M \Rightarrow 2y_m = y_A + y_B$$

Portanto:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Podemos concluir que, se tivermos um segmento de extremos A e B, a abscissa do ponto médio será a média aritmética das abscissas dos extremos e a ordenada do ponto médio será a média aritmética das ordenadas dos extremos.

Portanto, o **ponto médio** do segmento $\overline{AB}$ é dado por:

$$\mathrm{M}(\frac{\mathrm{x_A + x_B}}{2}, \frac{\mathrm{y_A + y_B}}{2})$$

Exemplo:

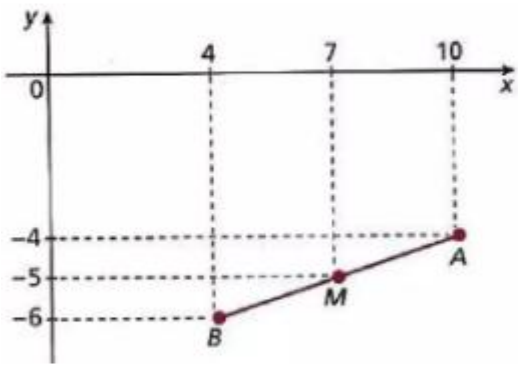
O ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, sendo $A(10, -4)$ e $B(4, -6)$, tem as coordenadas dadas por:

$$x_M = \frac{10 + 4}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$y_M = \frac{-4 + (-6)}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Logo, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M(7, -5)$.

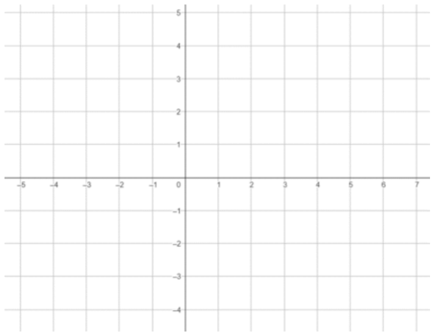
Figura 35 – Ponto médio dos pontos A (10,-5) e B (4,-6)



Fonte: Acervo dos autores

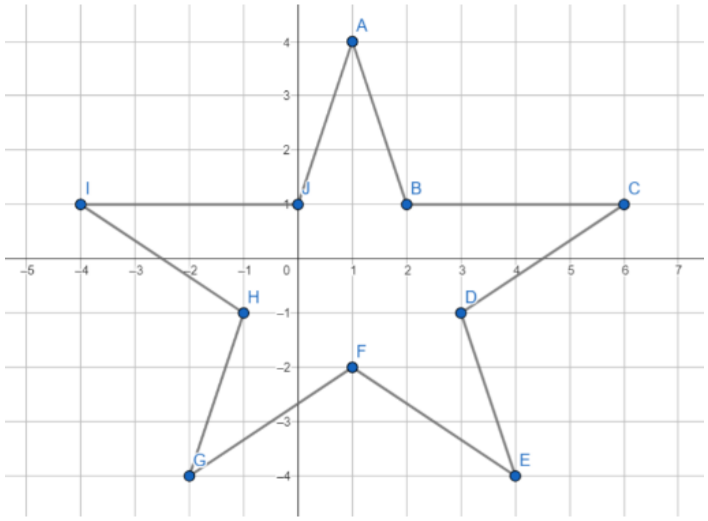
Exercício para os alunos:

1- Considere o seguinte plano cartesiano:



a) Identifique os pontos $A(1,4), B(2,1), C(6,1), D(3,-1), E(4,-4), F(1,-2), G(-2,-4), H(-1,-1), I(-4,1)\ e\ J(0,1)$ no plano cartesiano e em seguida trace os segmentos $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ, JA$.

Solução:



b) Em que quadrante estão localizados os pontos A, D, H e I?

Solução:

A – 1º quadrante, D – 4º quadrante; H – 3º quadrante e I – 2º quadrante.

c) Qual a distância entre os pontos A e B?

Solução:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-4)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{1+9} \Rightarrow AB = \sqrt{10}.$$

d) Qual o ponto médio do segmento CD?

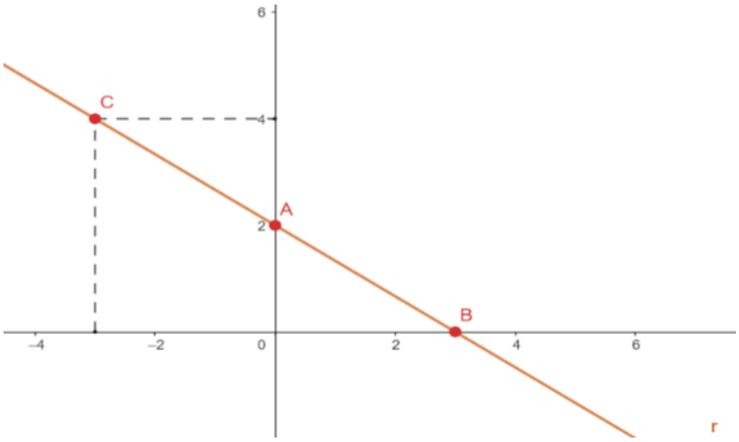
Solução:

$$M(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}) \Rightarrow M(\frac{2+6}{2}, \frac{1+1}{2}) \Rightarrow M(\frac{8}{2}, \frac{2}{2}) \Rightarrow M(4, 1).$$

4- Equação geral e equação reduzida da reta (30min)

Sejam os pontos $A(0,2), B(3,0)$ e $C\ (-3,4)$, pertencentes à mesma reta $\boldsymbol{r}$**.** Se $P(x, y)$ é um ponto qualquer de $\boldsymbol{r}$, temos:

Figura 36 – Pontos pertencentes a reta r



Fonte: Produção dos autores

1) $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são colineares: $\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 6 = 0.$

2) $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{C}$ são colineares : $\begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 3y + 6 = 0.$

3) $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são colineares : $\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - 6y + 12 = 0.$

As equações 1,2 e 3 são equivalentes entre si. Então, podemos associar qualquer uma dessas equações à reta **r,** representada a seguir.

Generalizando, sejam **r** a reta determinada pelos pontos $A\ (X_A, Y_A)$ e $B\ (X_B, Y_B)$ distintos (logo, $X_A \neq X_B\ ou\ Y_A\ \neq\ Y_B)$ e $P\ (x, y)$ um ponto qualquer de $\boldsymbol{r}$. Pela condição de alinhamento $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ vem:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_b)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Fazendo $y_A - y_b = a,\ x_B - x_A = b$ e $x_A y_B - x_B y_A = c$, temos:

$Ax\ +\ by\ + c\ = 0$, onde $a \neq 0\ ou\ b \neq 0$

Portanto, temos a seguinte propriedade:

A cada reta $\boldsymbol{r}$ do plano cartesiano associamos uma equação da forma: $ax + by + c = 0$, onde $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são números reais, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) são as coordenadas de um ponto qualquer de $\boldsymbol{r}$.

Analisando a validade da sua recíproca.

Sejam $A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B)$ pontos distintos e $P(x_{P,} y_B)$ um ponto qualquer, cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by + c = 0$, com $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ reais e $a \neq 0 \; ou \; b \neq 0$. Temos:

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \\ ax_P + by_P + c = 0 \end{cases}$$

Que é um sistema linear homogêneo em $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, com soluções diferentes da solução nula. Logo:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_p & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ ou seja, } \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \text{ e } \boldsymbol{P} \text{ são colineares.}$$

Portanto, podemos enunciar que: toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ reais $a \neq 0 \; ou \; b \neq 0,$ corresponde uma única reta $\boldsymbol{r}$ do plano cartesiano, cujos pontos têm coordenadas satisfazendo a equação.

A equação $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0 \; ou \; b \neq 0,$ é denominada **equação geral** da reta $\boldsymbol{r}$.

Exemplo: Seja $\boldsymbol{r}$ a reta determinada por $A(-5, -1)$ e $B(-1,1)$. Obtenha uma equação de $\boldsymbol{r}$**:**

Solução: Sendo $P(\, x, y)$ um ponto qualquer de r, vem:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \; -x - y - 5 - 1 - x + 5y = 0 \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

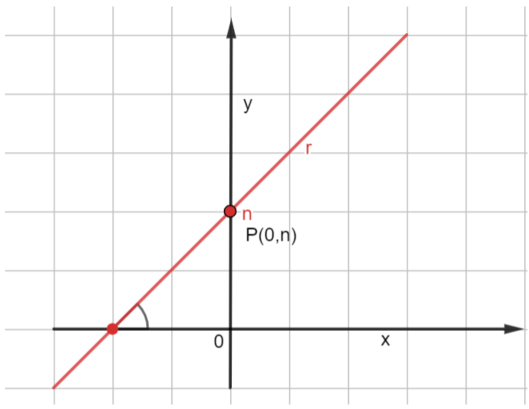
Portanto, $\boldsymbol{r}$ tem equação $x - 2y + 3 = 0$.

Equação reduzida:

Seja $ax + by + c = 0$ a equação de uma reta $\boldsymbol{r}$ não paralela ao eixo $\boldsymbol{y}$, ou seja, com

$b \neq 0$. Isolamos $\boldsymbol{y}$ e temos: $\mathrm{y} = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{x} - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}$

Figura 37 – Representação da equação reduzida da reta



Fonte: Produção dos autores

Fazendo $-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \mathrm{m}$ e $-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}} = \mathrm{n}$, obtemos a equação de $\boldsymbol{r}$**:**

$$\boldsymbol{y = mx + n}$$

Essa equação é denominada **equação reduzida** de r.

Lembrando o que foi estudado sobre função do 1ºgrau, o coeficiente $\boldsymbol{n}$ é denominado **coeficiente linear** de $\boldsymbol{r}$, e $\boldsymbol{m}$ é denominado **coeficiente angular** de $\boldsymbol{r}$.

O temo coeficiente linear se justifica porque $\boldsymbol{n}$ é a ordenada do ponto $P(0, n)$ em que a reta $\boldsymbol{r}$ intercepta o eixo y.

Exemplo: Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A(2,5)$ e $B(1,4)$

Resolução: $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ x & y \end{matrix} = 0$

$8 + 5x + y - 4x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow x - y + 3 = 0$ é a **equação geral.**

Exercício para os alunos:

Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A(2{,}5)$ e $B(3{,}6)$

Solução:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \Rightarrow m = \frac{(6) - (5)}{(3) - (2)} \Rightarrow m = 1.$$

$y - y_o = m.(x - x_o) \Rightarrow y - 5 = 1.(x - 2) \Rightarrow y - 5 = x - 2 \Rightarrow y = x + 3 \Rightarrow$ **Equação da reta.**

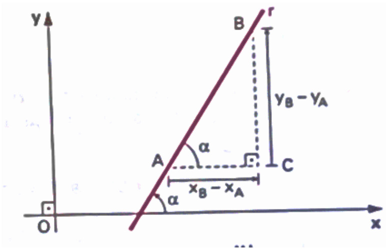
5- Coeficiente angular da reta (20min)

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos distintos de uma reta $\boldsymbol{r}$ não-paralela ao eixo y. A medida α, em graus, da inclinação de reta r é tal que $\alpha = 0°$ ou $0° < \alpha < 90°$ ou $90° < \alpha < 180°$. Se $0° < \alpha < 90°$, então $m = \text{tg}\,\alpha > 0$.

No ΔABC, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

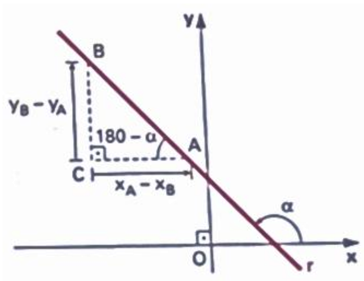
Figura 38 – Coeficiente angular quando α está entre 0º e 90º



Fonte: SOUZA, Joamir (2016)

Se $90° < \alpha < 180°$, então $m = tg\,\alpha < 0$, como na figura a seguir, no ΔABC, temos:

Figura 39 – Coeficiente angular quando α está entre 90º e 180º



Fonte: SOUZA, Joamir (2016)

$$\mathrm{tg}(180 - \alpha) = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \Rightarrow -\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ nas duas possibilidades.

Se $\alpha = 0°$, a fórmula $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ainda é válida.

Portanto, quaisquer que sejam os pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ de uma reta r não-paralela ao eixo y, seu coeficiente angular ou declive m é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemplo:

Qual é o Coeficiente angular da reta da equação $3x - 4y + 7 = 0$?

Solução:

Para encontrar o coeficiente angular desta reta devemos determinar a equação reduzida da reta. Podemos fazer isso isolando o y da equação.

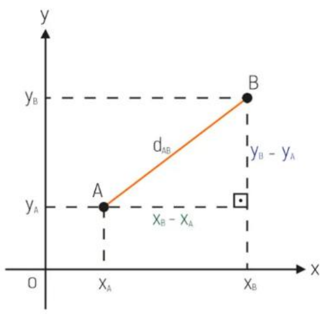
$$3x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow \ -4y = -3x - 7 \Rightarrow \mathrm{y} = -\frac{3}{-4}\mathrm{x} - \frac{7}{-4} \ \Rightarrow \mathrm{y} = \frac{3}{4}\mathrm{x} + \frac{7}{4}.$$

Logo, o coeficiente angular desta reta é $\frac{3}{4}$.

6- Distância entre dois pontos (20min)

De acordo com o seguinte gráfico representado a seguir

Figura 40 – Cálculo da distância entre dois pontos por meio da hipotenusa do triângulo retângulo



Fonte: Acervo dos autores

Sejam dois pontos $\mathrm{A}(\mathrm{X_A}, \mathrm{Y_A})$ e $\mathrm{B}(\mathrm{X_B}, \mathrm{Y_B})$ representados no gráfico acima. Como podemos calcular a distância entre A e B?

Inicialmente vamos supor que $X_A \neq X_B$ e $Y_A \neq Y_B$. O segmento AC mede $|X_B - X_A|$ e o segmento *BC* mede $|Y_B - Y_A|$.

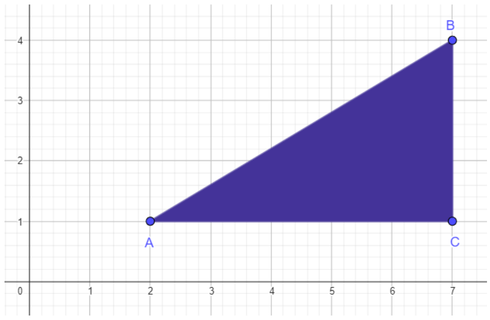
A distância entre A e B é igual à medida da hipotenusa do triângulo. Desta forma, para calcular essa medida, aplicamos o Teorema de Pitágoras:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \text{ ou } (AB)^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2.$$

Portanto, $AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$.

Esta relação também é válida quando $X_A = X_B$ e $Y_A = Y_B$. Por exemplo, observe o gráfico a seguir e calcule a distância entre A e B.

Figura 41 – Cálculo da distância dos pontos A e B do triângulo



Fonte: Acervo dos autores

Primeiramente identificamos suas coordenadas $A(2{,}1)$ $B(7{,}1)$ $C(7{,}4)$.

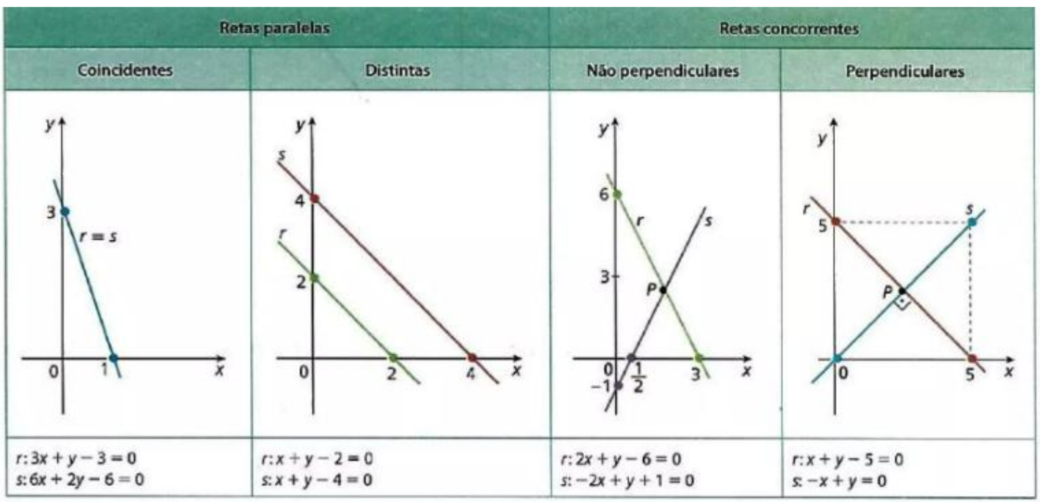
Com tais informações, e utilizando da fórmula que vimos anteriormente, conseguimos encontrar o que buscamos, da seguinte maneira:

$AB = \sqrt{(7-2)^2 + (4-1)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{5^2 + 3^2} \Rightarrow AB = \sqrt{25+9} \Rightarrow AB = \sqrt{34} \Rightarrow AB \approx 5{,}83.$

7- Posição relativa entre duas retas no plano (30min)

Duas retas coplanares podem ser classificadas em coincidentes, paralelas distintas ou concorrentes, sendo as retas perpendiculares um caso particular de retas concorrentes. Observe, por exemplo, as retas r e s a seguir e suas respectivas equações e posições relativas no plano.

Figura 42 – Exemplo de retas paralelas e retas concorrentes

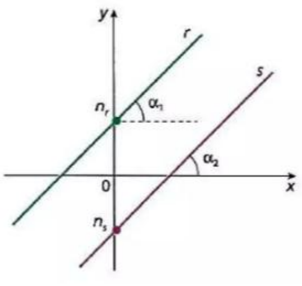


Fonte: LEONARDO, Fabio Martins (2016)

Condição de paralelismo de duas retas

Duas retas r e s são paralelas quando têm a mesma direção.

Figura 43 – Retas paralelas

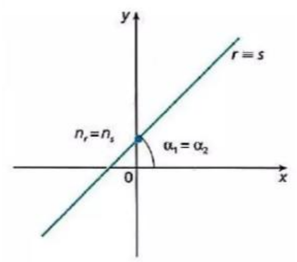


Fonte: LEONARDO, Fabio Martins (2016)

Vamos verificar as condições para que as retas r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s e coeficientes lineares n_r e n_s, sejam paralelas. Lembrando que retas paralelas podem ser distintas ou coincidentes, temos:

Para que as retas r e s sejam **paralelas distintas**, devem satisfazer a seguinte condição: $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$.

Figura 44 – Retas paralelas distintas



Fonte: LEONARDO, Fabio Martins (2016)

Para que as retas r e s sejam **paralelas coincidentes**, devem satisfazer a seguinte condição: $\mathrm{m_r} = \mathrm{m_s}$ e $\mathrm{n_r} = \mathrm{n_s}$.

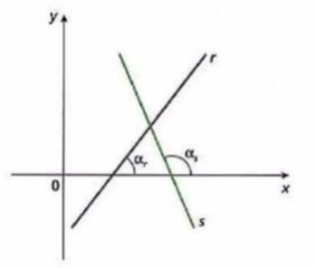
Condição de perpendicularismo de duas retas

Para que duas retas r e s não verticais, de inclinações α_r e α_s e de coeficientes angulares $\mathrm{m_r} = \mathrm{tg}\alpha_\mathrm{r}$ e $\mathrm{m_s} = \mathrm{tg}\alpha_\mathrm{s}$, sejam concorrentes devemos ter:

$$\alpha_\mathrm{r} \neq \alpha_\mathrm{s} \rightarrow \mathrm{tg}\alpha_\mathrm{r} \neq \mathrm{tg}\alpha_\mathrm{s} \rightarrow \mathrm{m_r} \neq \mathrm{m_s}$$

Portanto, para que duas retas não verticais sejam **concorrentes**, elas devem ter coeficientes angulares diferentes.

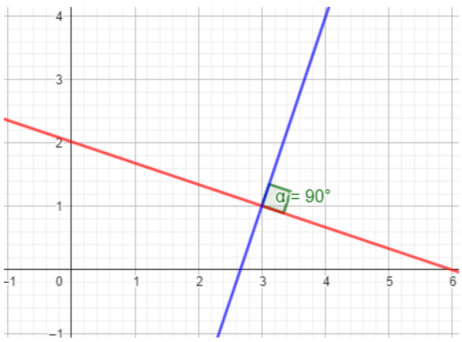
Figura 45 – Retas concorrentes



Fonte: LEONARDO, Fabio Martins (2016)

Duas retas, r e s concorrentes, não verticais, são **perpendiculares** quando: $m_r \times m_s = -1$.

Figura 46 – Retas perpendiculares



Fonte: Produção dos autores

Exercício:

Determinar a posição da reta r, de equação $x + 2y - 6 = 0$, em relação à reta s, de equação $3x + 6y - 5 = 0$.

Primeiro, vamos determinar os coeficientes angular e linear de r e s usando as equações na forma reduzida. Para a reta r, temos: $x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$. Assim, $m_r = -\frac{1}{2}$ e $n_r = 3$. Para a reta s, temos:

$$3x + 6y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$$

Portanto, $m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_s = \frac{5}{6}$

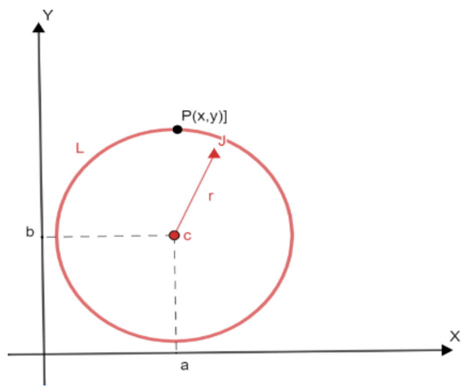
Como $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, então as retas r e s são paralelas distintas.

8- Circunferência equação geral e reduzida (30min)

Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância $\boldsymbol{r}$ de um ponto C fixado, chamado **centro** da circunferência.

Isso significa que se um ponto qualquer $P(x, y)$ movimentar-se sobre a circunferência, suas coordenadas variarão, mas a distância de $\boldsymbol{P}$ ao centro da circunferência será sempre igual à medida do raio.

Figura 47 – Dedução da equação da circunferência



Fonte: RODRIGUES, Sérgio (2020)

Seja **L** a circunferência de centro $C(a,b)$ e de raio $\boldsymbol{r}$.

Seja um ponto $P(x,y)$, distância de $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{C}$ é dada por: $d_{pc} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$.

Ao elevarmos os dois membros da equação ao quadrado, obtemos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Que é denominada **equação da circunferência de centro $\boldsymbol{C}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ e raio $\boldsymbol{r}$.**

Note que essa equação também pode ser escrita assim:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Exemplos:

1- A circunferência de centro C $(3,5)$ e de raio 4 tem equação:

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4^2$$

2- A circunferência de centro C $(-2,4)$ e de raio 6 tem equação:

$$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 6^2 \leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 6^2$$

3- (FEI-SP) Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C(2,1)$ e que passa pelo ponto $A(1,1)$.

Cálculo do raio:

$r = D_{CA}$ (distância entre os pontos A e C)

r = $\sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2}$ → r = 1.

Assim, a equação da circunferência fica: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

9- Exercícios:

1- Observe as coordenadas dos pontos e descubra a que quadrante cada um deles pertence sem localizá-los no plano cartesiano.

a) $(3, -\sqrt{2})$

b) $(-\pi, -4)$

c) $(\frac{\sqrt{7}}{2}, \pi)$

d) $(-1, 1)$

Solução:

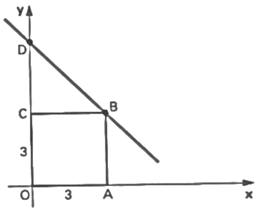
a) Como $3 \geq 0$ e $-\sqrt{2} \leq 0$, este ponto está localizado no 4º quadrante;

b) Como $-\pi \leq 0$ e $-4 \leq 0$, este ponto está localizado no 3º quadrante;

c) Como $\frac{\sqrt{7}}{2} \geq 0$ e $\pi \geq 0$, este ponto está localizado no 1º quadrante;

d) Como $-1 \leq 0$ e $1 \geq 0$, este ponto está localizado no 2º quadrante.

2- A figura abaixo mostra o quadrado $OABC$ de lado 3. Sabendo que D $(0{,}6)$, escreva a equação reduzida da reta BD a partir de seu coeficiente angular.



Solução:

Pelo enunciado sabemos que o ponto D tem as coordenadas (0,6) e, pela figura, vemos que o ponto B tem as coordenadas (3,3). Assim o coeficiente angular da reta BD é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 3}{0 - 3} = -1.$$

Para encontrar o coeficiente linear da reta, basta olhar a coordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo y e pegar o valor que está no y. Nesse caso a reta intercepta no ponto D, sendo assim, o coeficiente linear é 6. Desta forma a equação procurada é $y = -x + 6$.

3- Determine a equação da reta que passa pelo ponto A $(2{,}3)$ e possui ângulo de inclinação de 45º.

Solução:

$m = tg\, 45º = 1$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \Rightarrow m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \Rightarrow y_b - y_a = m(x_b - x_a) \Rightarrow y - 3 = 1.(x - 2)$$

$\Rightarrow y - y_o = m.(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = x - 2 \Rightarrow y = x + 1$ →**Equação da reta**

4- Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A\ (2{,}5)$ e $B\ (3{,}6)$.

$$\left|\begin{matrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ x & y \end{matrix} = 0$$

$12 + 5x + 3y - 6x - 2y - 15 = 0 \Rightarrow -x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = x + 3$ → **Equação da reta**

5- Verificar se as retas r e s, de equações $2x + 3y - 6 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$, são perpendiculares.

Solução:

Reta r: $2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$

Reta s: $3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = \frac{3}{2}$

Como $-\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$, sabemos que $m_r \times m_s = -1$; portanto as retas r e s são perpendiculares.

6- Determinar a equação reduzida da circunferência com centro no ponto $C(2{,}3)$ e que passa pelo ponto $P(-1{,}2)$.

Solução:

Sabemos que $r = d_{cp}$. Então:

$$d_{cp} = r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(-1, -2)^2 + (2\,, 3)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1 + 9} \Rightarrow r = \sqrt{10}$$

Sendo $x_c = 2, y_c = 3\ e\ r = \sqrt{10}$, temos:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{10})^2$$

Resposta: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$

7- A cidade do Promat tem dois marcos históricos importantes: a Praça da Circunferência, localizada no ponto $A\ (3{,}4)$, e a Torre de Hanói, situada no ponto $B\ (7{,}1)$ no mapa da cidade, representado em um plano cartesiano. O departamento de turismo da cidade quer colocar placas informativas que indiquem a distância exata entre esses dois marcos. A distância, em unidades de mapa, que será informada é de?

Solução:

Utilizando da fórmula entre dois pontos e substituindo os valores temos:

$$AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{(7-3)^2 + (1-4)^2} \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{16+9} \;\Rightarrow\; AB = \sqrt{25} \;\Rightarrow\; AB = 5.$$

Avaliação: A avaliação se desenvolverá no decorrer das aulas por meio de questões que vamos entregar aos alunos e depois realizar a correção das mesmas e a devolutiva.

REFERÊNCIAS

EDITORAOPIRUS (ed.). **Equação geral e reduzida da reta**. Disponível em: https://www.editoraopirus.com.br/uploads/mg/materiais/matematica/mg-matematica-curso-609919e6ce3d9.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

LEONARDO, Fabio Martins de. Conceitos Básicos e a Reta. In: LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. Cap. 5. p. 100-135.

RODRIGUES, Sérgio. **Geometria Analítica**: equação da circunferência. Equação da circunferência. 2020. Disponível em: https://www.profsergio.com.br/educar/pluginfile.php/1196/mod_resource/content/0/geometria_analitica_eq._circunferencia_-_2020.pdf. Acesso em: 10 set. 24.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. O Ponto e a Reta. In: SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. **Contato Matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. Cap. 2. p. 36-71.

STOCCO, Kátia Cristina. Geometria analítica: estudo analítico da reta. In: STOCCO, Kátia Cristina. **Matemática**: ensino médio. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005. Cap. 2. p. 50-84.

TADEU, Walter. **Geometria Analítica**: circunferência. circunferência. Disponível em: https://professorwaltertadeu.mat.br/CP2VEST30questGeoAnalCircunf.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

Relatório Promat aula 6 – (05/10/2024)

No dia 5 de outubro de 2024, foi realizado o 6º encontro do Promat, contando com a presença de 17 alunos. A aula teve início com a organização dos alunos em grupos, que acabou-se formando quatro grupos, sendo designadas cores diferentes para cada um. Desta forma solicitamos a ajuda deles para afastar as mesas, liberando o centro da sala para a atividade prática sobre o plano cartesiano. Com isso, assim que o espeço foi preparado, a regra de Crammer foi introduzida, e explicamos seu uso na resolução de sistemas lineares. Neste momento, percebemos que alguns alunos estavam prestando atenção durante a explicação, enquanto outros aparentavam estar dispersos.

Antes que de iniciar a atividade prática proposta, informamos aos alunos que os próximos sábados não teríamos aulas do PROMAT nos próximos dois sábados, um por conta do feriado do dia das crianças, e o outro dia por termos recesso acadêmico.

Dando sequência, passamos a definição de plano cartesiano, pedindo para que um representante de cada grupo viesse ao centro da sala, para que se localizassem de forma correta no plano cartesiano disposto no centro da sala. Esses alunos receberam coordenadas que deveriam seguir para se posicionar corretamente no plano. Após a organização, questionamos cada grupo sobre o quadrante em que seu representante se encontrava, promovendo a interação e compreensão do conteúdo.

Em seguida, introduzimos o conceito de distância entre dois pontos no plano cartesiano. Alguns alunos estavam atentos, enquanto outros se distraíam. Houve um momento em que um aluno estava utilizando o celular com frequência, mas mantivemos o foco da turma pedindo para dois voluntários demonstrarem a distância entre dois pontos usando um barbante. Enquanto esses alunos realizavam a atividade, os demais resolveram exercícios propostos em suas carteiras.

Ao apresentar o conceito sobre o teorema de Pitágoras, aproveitamos para reforçar que ele é a ferramenta adequada para calcular distância entre pontos que não estão alinhados com os eixos x e y. Neste momento, um aluno questionou se seria possível utilizar seno, cosseno e tangente para esse cálculo. Dada tal pergunta o professor Maíri respondeu que, apesar de serem úteis em outros contextos, para essa situação em específico, o teorema de Pitágoras era mais apropriado, já que conhecíamos as medidas dos catetos e queríamos descobrir a hipotenusa. Durante essa discussão, alguns alunos prestavam atenção e outros participavam mais ativamente, tirando dúvidas com os professores.

Com isso, prosseguimos solicitando aos alunos que identificassem pontos fornecidos pelo exercício e encontrassem seus pontos médios. Para garantir a compreensão da turma, dois professores se dirigiram ao plano cartesiano e selecionaram pontos aleatórios para reforçar o conceito.

Logo após, organizamos uma atividade lúdica: pedimos que alguns alunos fossem até o centro da sala para representar uma estrela no plano cartesiano, para a construção de tal, sem os alunos terem ciência de que se formaria uma estrela, foi dado coordenadas para cada um e fomos ligando os pontos, em que por final tivemos a construção da estrela como esperado. Durante o intervalo, uma aluna precisou sair de aula.

Ao retornar do intervalo, os alunos tiveram tempo para finalizar os exercícios anteriores. Em seguida, apresentamos a equação geral e a equação reduzida da reta. Alguns alunos mostraram bastante envolvimento, auxiliando ativamente na resolução dos exemplos. Depois dessa explicação, abordamos o conceito de coeficiente angular, propondo um novo exercício. Enquanto os alunos trabalhavam na atividade, os professores circularam pela sala, tirando dúvidas e oferecendo suporte individual. Com isso, um aluno se voluntariou para resolver o exercício no quadro, concluindo com sucesso a atividade, sob orientação dos professores.

Em seguida, abordamos os conceitos de posição relativa entre duas retas no plano, trazendo os subitens deste conteúdo, mais em específico condição de paralelismo entre duas retas, condição de perpendicularismo de duas retas. Após as explicações e exemplos, foram tiradas as dúvidas que alguns alunos acabaram apresentando. Por fim, trouxemos a explicação dos conceitos de equação da circunferência geral e reduzida, e em sequência solicitamos que realizassem atividades sobre os conceitos recém trabalhados.

Finalizando o encontro, durante a realização da atividade os professores transitavam entre os alunos para ajudar caso apresentassem quaisquer dúvidas, e assim se deu até o final da aula.

2.7 AULA 07 (26/10/2024) – PLANO DE AULA E RELATÓRIO

PLANO DE AULA 7- (26/10/2024)

Fabrício Adriel Rustick

Maíri Poeta Castilho da Silva

Michelli Neves Lavagnoli

Milleni Ferreira de Souza

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio

Tempo de execução: 4 horas-aula;

Conteúdo: Trigonometria

Objetivo Geral: Revisar e relembrar conceitos e cálculos relacionados a trigonometria.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer no triangulo retângulo qual é o cateto oposto, cateto adjacente, hipotenusa e os ângulos pertencentes a ele;
- Compreender a definição de seno, cosseno, tangente e como calculá-los;
- Identificar em quais situações o seno, o cosseno e a tangente são utilizados;
- Deduzir a fórmula dos ângulos notáveis;
- Calcular distâncias a partir da trigonometria;
- Compreender a definição da lei do seno e cosseno e suas aplicações;
- Resolver exercícios relacionados ao conteúdo.

Recursos Didáticos: fita métrica, transferidor, fita, canudo, barbante, cartolina (20cm x 10cm) objeto que sirva de peso, papel milimetrado;

Encaminhamento metodológico:

1- Trigonometria no triângulo retângulo (15 min)

Antes de começar a explicação sobre trigonometria no triângulo, vamos entregar para os alunos um papel milimetrado para que eles realizem a construção das relações trigonométricas junto conosco. Em seguida daremos início ao conteúdo.

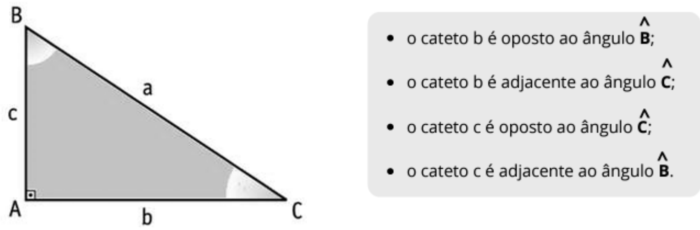
O triângulo retângulo é formado por:

- **Catetos:** são os dois lados que formam o ângulo reto. Podem ser categorizados como cateto oposto e cateto adjacente.
- **Hipotenusa:** é o lado oposto ao ângulo reto, sendo sempre o maior lado do triângulo retângulo.

Para determinar se um lado é cateto oposto ou cateto adjacente em relação a um determinado ângulo em um triângulo retângulo, é necessário identificar o ângulo em questão.

Observe o triângulo retângulo abaixo:

Figura 48 – Triângulo retângulo

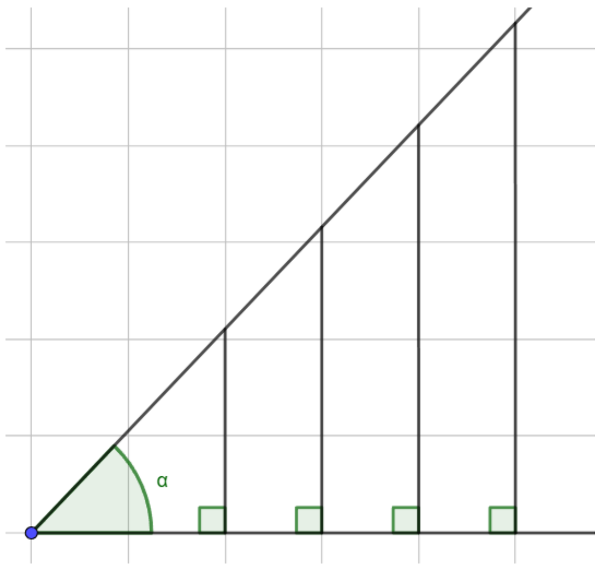


Fonte: ESPÍRITO SANTO

2- Definição de seno, cosseno e tangente (30 min)

Observe que, dado um ângulo qualquer, podemos desenhar uma infinidade de triângulos retângulos. Como podemos observar na figura abaixo:

Figura 49 – Triângulos retângulos



Fonte: Produção dos autores.

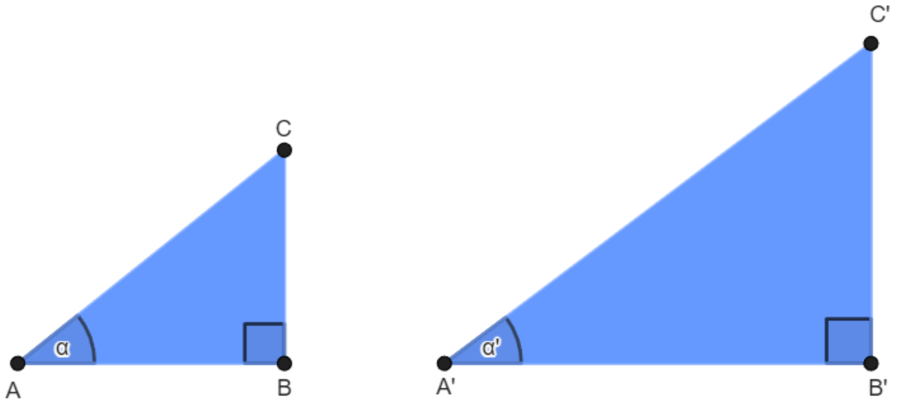
É importante observar que:

- Todos os triângulos possuem um ângulo α e um ângulo reto;
- O terceiro ângulo de cada um dos triângulos mede 90º - α;
- Os triângulos são semelhantes (verifique qual caso de semelhança de aplica).

Os estudos trigonométricos no triângulo envolvem o seno, o cosseno e a tangente, considerados razões trigonométricas, que dependem apenas do ângulo de abertura do triângulo.

Se atente aos triângulos a seguir:

Figura 50 – Semelhança entre dois triângulos



Fonte: Produção dos autores

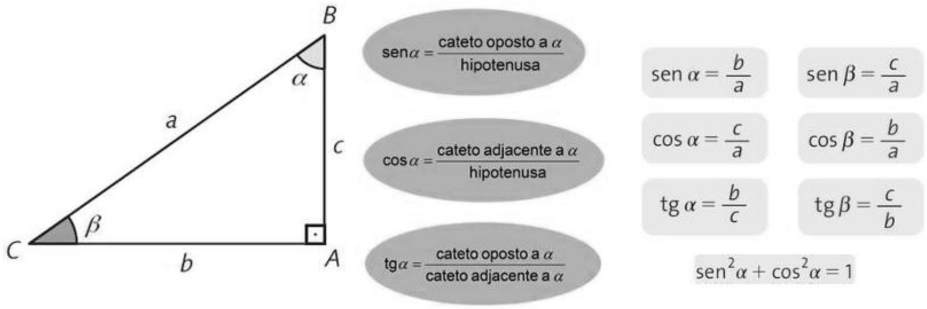
As razões de semelhança entre eles são:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Note que por serem semelhantes $\alpha = \alpha'$. No triângulo menor, se dividirmos BC por AB, teremos um determinado resultado. Do mesmo modo, no triângulo maior, se dividirmos B'C' por A'B', obteremos o mesmo resultado. Isso significa que o resultado da divisão não depende do tamanho do triângulo, mas do ângulo de abertura α.

Desta forma, a partir do triângulo retângulo, podemos observar algumas relações trigonométricas entre os ângulos agudos (α e β) e os lados do triângulo a seguir:

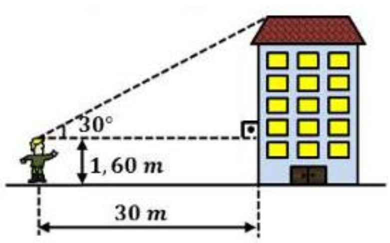
Figura 51 – Relações trigonométricas no triângulo retângulo



Fonte: ESPÍRITO SANTO

Exemplo:

1) Para determinar altura de um edifício, um observador coloca-se a 30m de distância e assim o observa segundo um ângulo de 30º, conforme mostra a figura. Calcule a altura do edifício medida a partir do solo horizontal. (Dados: sen 30º = $\frac{1}{2}$; cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e tg 30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{3}$ =1,73)



Solução: Analisando a imagem percebemos que nesse caso devemos usar a tangente para calcular a altura desse edifício. Logo:

$$tg\ 30° = \frac{x}{30}$$

Com os dados que já temos pelo enunciado, basta substituir na fórmula:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{30}$$

Multiplicando cruzado temos:

$$3x = 30\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{30\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 10\sqrt{3} \Rightarrow x = 10 \times 1{,}73 \Rightarrow x = 17{,}3m$$

Como temos que levar em consideração a altura do observador, altura do edifício será o valor do cateto oposto somado com a altura do observador. Sendo assim, a altura do prédio é:

$$Altura = 17{,}3 + 1{,}60 = 18{,}9m$$

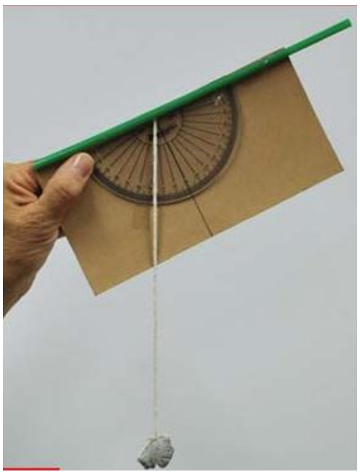
Calculando a altura com um medidor de ângulos (40 min)

Após realizar a explicação e resolvermos este exemplo com os alunos, vamos pedir para que eles formarem duplas e em seguida entregaremos para eles uma fita métrica, um transferidor, um pedaço de fita, um canudo, um barbante, um pedaço de cartolina (20cm x 10cm) e um objeto que sirva de peso. Iremos construir com os alunos um medidor de ângulos, seguindo os seguintes passos:

- Fixe o transferidor na cartolina usando uma fita transparente, destacando o segmento de reta que passa pela marca dos 90º;
- Prenda o barbante com o peso e o canudo coincidindo com a linha-de-fé do transferidor;

Ao final iremos obter um medidor parecido com a figura abaixo:

Figura 52 – Medidor de ângulos



Fonte: BRASIL. Maria Zoraide M. C. Soares (2010)

Em seguida, pediremos aos alunos que meçam a altura dos seguintes itens:

- O ponto mais alto do quadro da sala;
- A altura da porta da sala;
- A altura do bebedouro;
- A altura dos professores.
- A altura dos participantes da dupla.
- A altura da janela.
- O ponto mais alto do ventilador em relação ao chão.

O uso do medidor de ângulos deve seguir alguns passos:

- Deve-se observar o ponto mais alto do objeto com o canudo
- Pedir para um colega que anote o menor valor indicado pelo barbante no transferidor;
- Medir a distância do observador até o item que será medido;
- Medir a altura do aluno que mediu o ângulo até a altura dos olhos.

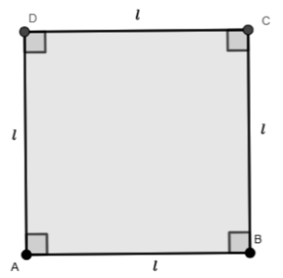
Depois que os dois membros da dupla realizarem a coleta de dados, voltaremos para a sala e em seguida pediremos que os alunos calculem a altura desses itens a partir dos dados que eles coletaram. Ao final da atividade vamos comparar os valores obtidos para que os alunos percebam que indiferente da altura do aluno e da distância que eles estão dos itens, os resultados irão ser parecidos.

3- Ângulos notáveis (45 min)

Os ângulos notáveis em trigonometria são ângulos cujos valores das funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente) são amplamente conhecidos e fáceis de calcular. Os ângulos mais comumente considerados como notáveis são os ângulos de 30º, 45º e 60º.

Vamos calcular $sen(45°), cos(45°)\ e\ \ tg(45°)$. Para isso, vamos considerar o quadrado a seguir:

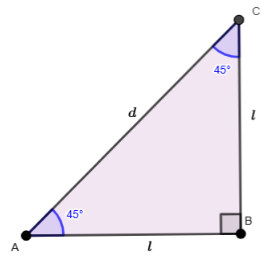
Figura 53 – Quadrado utilizado para a dedução dos ângulos notáveis



Fonte: Produção dos autores

Tracemos uma diagonal para obtermos um triângulo retângulo isósceles. Seus ângulos agudos medem 45º.

Figura 54 – Triângulo retângulo utilizado na dedução dos ângulos notáveis



Fonte: Produção dos autores

A diagonal d pode ser calculada em função de l. Para isso, usaremos o Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

Considerando o triângulo retângulo ABC, temos:

$$sen(45°) = \frac{l}{d}$$

$$sen(45°) = \frac{l}{l\sqrt{2}}$$

$$sen(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$sen(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De maneira semelhante:

$$cos(45°) = \frac{l}{d}$$

$$cos(45°) = \frac{l}{l\sqrt{2}}$$

$$cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

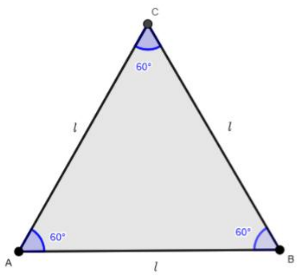
Agora, vamos determinar $tg(45º)$:

$$tg(45°) = \frac{l}{l}$$

$$tg(45°) = 1$$

Agora, vamos calcular o $sen(30°), \cos(30°)\; e\; tg(30°)$.Para isso, vamos considerar o triângulo equilátero a seguir:

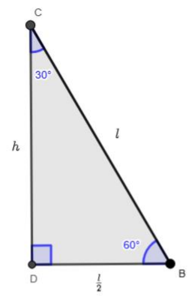
Figura 55 – Triângulo equilátero utilizado na dedução dos ângulos notáveis



Fonte: Produção dos autores

Tracemos o segmento que representa a altura para obtermos um triângulo retângulo. Seus ângulos agudos medem 30º e 60º. Como a altura do triângulo equilátero está no ponto médio do lado, então esse mede $\frac{l}{2}$.

Figura 56 – Triângulo equilátero cortado ao meio e utilizado na dedução dos ângulos notáveis



Fonte: Produção dos autores

A altura h pode ser calculada em função de l. Para isso, usaremos o Teorema de Pitágoras.

$$l^2 = h^2 + (\frac{l}{2})^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Considerando o triângulo retângulo BCD, temos:

$$sen(30°) = \frac{l/2}{l}$$

$$sen(30°) = \frac{l}{2} \times \frac{1}{l}$$

$$sen(30°) = \frac{1}{2}$$

De maneira semelhante, temos:

$$\cos(30°) = \frac{h}{l}$$

$$\cos(30°) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l}$$

$$\cos(30°) = \frac{l\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{l}$$

$$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Agora, vamos determinar tg(30º),

$$tg(30°) = \frac{\frac{l}{2}}{h}$$

$$tg(30°) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

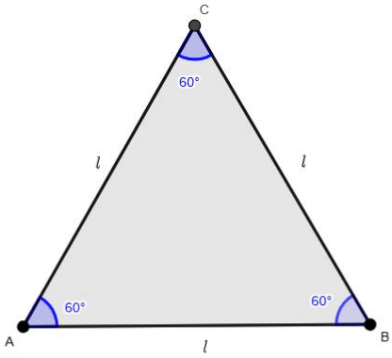
$$tg(30°) = \frac{l}{2} \times \frac{2}{l\sqrt{3}}$$

$$tg(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$tg(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Agora, vamos calcular o $sen(60°), \cos(60°)\, e\; tg(60°)$. Para isso, vamos considerar o triângulo equilátero a seguir:

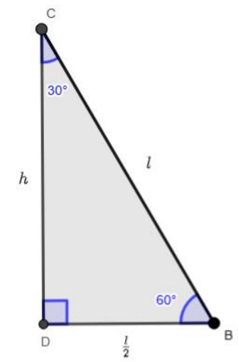
Figura 57 – Triângulo equilátero utilizado na dedução dos ângulos notáveis



Fonte: Produção dos autores

Tracemos uma altura para obtermos um triângulo retângulo. Seus ângulos agudos medem 30º e 60º. Como a altura do triângulo equilátero está no ponto médio do lado, então esse mede $\frac{l}{2}$.

Figura 58 – Triângulo equilátero cortado ao meio e utilizado na dedução dos ângulos notáveis



Fonte: Produção dos autores

Por meio do Teorema de Pitágoras, já calculamos a medida de h deste triângulo retângulo anteriormente. Temos então que h = $\frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Considerando o triângulo retângulo BCD, temos:

$$sen(60°) = \frac{h}{l}$$

$$sen(60°) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l}$$

$$sen(60°) = \frac{l\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{l}$$

$$sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De maneira semelhante, temos:

$$\cos(60°) = \frac{\frac{l}{2}}{l}$$

$$\cos(60°) = \frac{l}{2} \times \frac{1}{l}$$

$$\cos(60°) = \frac{1}{2}$$

Agora, vamos determinar tg(60º):

$$tg(60°) = \frac{h}{\frac{l}{2}}$$

$$tg(60º) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}}$$

$$tg(60°) = \frac{l\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{l}$$

$$tg(60°) = \sqrt{3}$$

Podemos resumir os resultados obtidos em uma tabela:

Tabela 4: Tabela com valores notáveis das trigonometrias

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: elaborada pelos autores (2024)

Música para facilitar a memorização do seno, cosseno e a tangente dos ângulos notáveis apresentaremos a música que segue e cantaremos com a turma.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=2Efe8kqCZEQ&t=93s

Jingle Bells da Trigonometria

Pelluso

Geometria é bela

Precisamos dela

Trigonometria vamos estudar

Ela vem de Tales e vem de Pitágoras

Prova do Pelluso, vou gabaritar

1, 2, 3

3, 2, 1

Tudo sobre 2

A raiz vai no 3 e também no 2

A tangente é diferente, vejam só vocês

Raiz de 3 sobre 3, 1, raiz de 3

Seno e cosseno e tem a tangente

Com o soh cah toa vou memorizar

Dizem que é difícil

Eu já decorei
Prova do Pelluso, já gabaritei
1, 2, 3
3, 2, 1
Tudo sobre 2
A raiz vai no 3 e também no 2
A tangente é diferente, vejam só vocês
Raiz de 3 sobre 3, 1, raiz de 3
Raiz de 3 sobre 3, 1 raiz de 3

Exercício:

Um nadador atravessa um rio, seguindo um ângulo de 30° com uma das margens. Sabendo que a largura do rio mede 40 m, determine a distância percorrida pelo nadador para atravessar o rio.

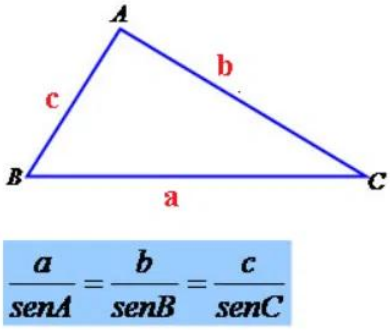
Solução: $sen(30°) = \frac{40}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{40}{x} \Rightarrow x = 80m.$

4- Lei dos senos e cossenos (45 min)

Lei dos senos:

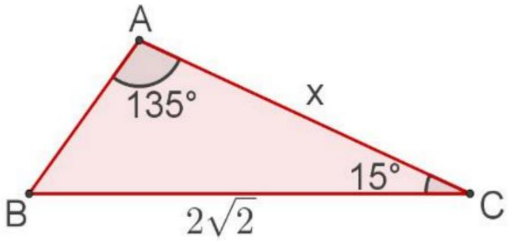
A Lei dos Senos determina que em um triângulo qualquer, a relação do seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo. Esse teorema demonstra que num mesmo triângulo a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre constante. Assim, para um triângulo ABC de lados a, b, c, a Lei dos Senos admite as seguintes relações:

Figura 59 – Lei dos senos: relações no triângulo retângulo



Fonte: COLÉGIO NOSSA SENHORA DA SOLEDADE

Exemplo: No triângulo representado a seguir, qual é a medida do segmento AC, destacada pela letra x, dado que essas medidas estão em centímetros?



a) 2cm
b) $2\sqrt{3}$ cm
c) $3\sqrt{2}$ cm
d) $3\sqrt{3}$ cm
e) $4\sqrt{2}$ cm

Solução: Observe que x é o oposto ao ângulo B. Para descobrir sua medida, basta fazer: 135º+15º+B = 180º.

Nesse caso, B=30º. Usando lei dos cossenos, teremos:

$$\frac{x}{\mathrm{sen}30} = \frac{2\sqrt{2}}{\mathrm{sen}\ 135}$$

$$x\ \mathrm{sen}45 = 2\sqrt{2}\ \mathrm{sen}30$$

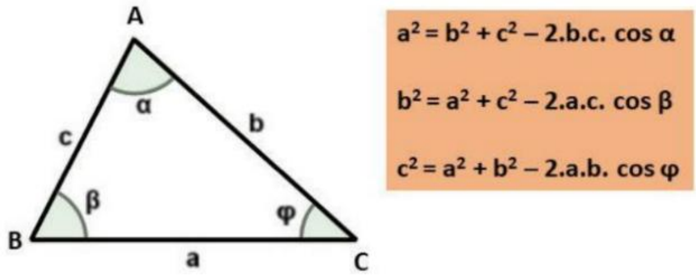
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 2$$

Lei do cosseno:

A Lei dos Cossenos é utilizada para calcular a medida de um lado ou de um ângulo desconhecido de um triângulo qualquer, conhecendo suas outras medidas. Lei dos Cossenos "Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles.

Figura 60 – Lei dos cossenos: relações no triângulo retângulo



Fonte: COLÉGIO NOSSA SENHORA DA SOLEDADE

Exemplo:

(Unifor-CE) Um terreno de forma triangular tem frente de 10 m e 20 m, em ruas que formam, entre si, um ângulo de 120º. A medida do terceiro lado do terreno, em metros, é:

a) $10\sqrt{5}$

b) $10\sqrt{6}$

c) $10\sqrt{7}$

d) 26

e) $20\sqrt{2}$

Solução:

Lembrete: cos 120º = -1/2

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\,a$$

$$a^2 = (10)^2 + (20)^2 - 2x10x20x(-1/2)$$

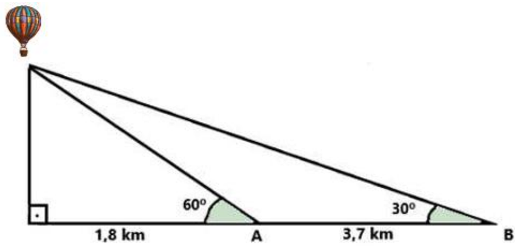
$$a^2 = 100 + 400 + 200$$

$$a^2 = 700$$

$$a = 10\sqrt{7}$$

5- Exercícios (25 min)

1- (Enem 2010) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição. (Dados: sen 60º = 0,8; cos 60º = 0,5 e tg 60º = 1,73)



Na data do acontecido, duas pessoas avistara o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60º; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura e o avistou sob um ângulo de 30º. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

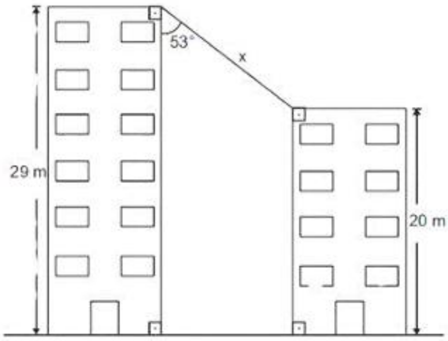
a) 1,8 k
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

Solução: Para calcular a altura do balão, devemos analisar a figura e definir qual razão trigonométrica vamos usar. Neste caso, a tangente do ângulo de 60º é a melhor opção:

$$tg\ 60° = \frac{h}{1{,}8} \Rightarrow h = tg\ 60° \times 1{,}8 \Rightarrow h = 1{,}73 \times 1{,}8 \Rightarrow h = 3{,}1\ km$$

Logo, a altura do balão em relação ao solo é de 3,1 km.

2- (PAEBES) Um telhado será instalado entre dois prédios de um condomínio, de forma que sua inclinação em relação ao prédio maior será de 53º, conforme representado na figura abaixo. Qual será o comprimento x desse telhado? (Dados: sen 53º = 0,8; cos 53º = 0,6 e tg 53º = 1,3)



Solução: Inicialmente devemos analisar a imagem e ver quais informações conseguimos retirar. Como queremos calcular o valor de x, é possível obter o tamanho de um dos catetos calculando a diferença de altura entre os dois prédios. Sendo assim, temos:

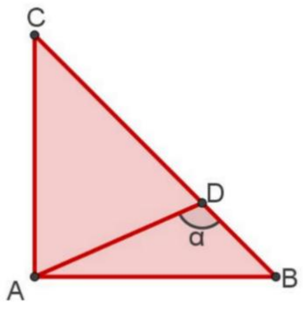
$$29 - 20 = 9m$$

Analisando o triângulo retângulo formado, temos a medida do cateto adjacente e o ângulo, logo devemos utilizar o cosseno:

$$cos\ 53° = \frac{9}{x} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{9}{x} \Rightarrow x = 9 \times 0{,}6 \Rightarrow x = 15m$$

Logo, o comprimento do telhado será de 15 metros.

3- (UFU-MG) Considere o triângulo retângulo a seguir. Sabendo-se que α = 120°, AB = AC = 1 cm, então AD é igual a:



a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm

b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm

c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm

d) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm

Solução:

Observe que o triângulo é isóscele, pois AB = AC = 1 cm. Portanto, os ângulos B e C são iguais a 45°, uma vez que eles são iguais porque são os ângulos da base do triângulo isósceles. Considerando apenas o triângulo ABD, temos:

$$\frac{1}{sen\ 120} = \frac{x}{sen\ 45}$$

$sen\ 45 = x.sen\ 120$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = x\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{2} = x\sqrt{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Avaliação: A avaliação será realizada por meio da resolução dos exercícios e da participação ativa na aula.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Maria Zoraide M. C. Soares. Universidade Estadual de Campinas. **O experimento**. Campinas: Creative Commons. 12 p. Disponível em: //efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/994/a_altura_da_arvore---o_experimento.pdf. Acesso em: 12 out. 2024.

COLÉGIO NOSSA SENHORA DA SOLEDADE. **Lei dos senos e cossenos – Matemática – 3º ano**. Disponível em: https://www.colegiosoledade.com.br/sistema/arquivos/aulas_multimidia/17-AULA%201%20-%20LEI%20DOS%20SENOS%20E%20COSSENOS%20-%20MATEMATICA%20-%203%20ANO.pdf. Acesso em: 16 out. 2024.

EDUCAÇÃO, Sistema Marista de. **9ºano Matemática Módulo 3**: ensino fundamental anos finais. 2. ed. Bela Vista: Editora Ftd, 2024. 192 p.

ESPÍRITO SANTO. Subsecretaria de Educação Básica e Profissional. Secretaria de Educação (org.). **Material Estruturado**: matemática 2ª série ensino médio. 19 p. Disponível em: //efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/wp-content/uploads/2024/03/2a-SERIE-MATEMATICA.-SEMANA-4.pdf. Acesso em: 12 out. 2024.

Geogebra. **Trigonometria no Triângulo Retângulo**: Seno, Cosseno e Tangente de 30º, 45º e 60º. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/M3vta5Uv#material/yvdamchx. Acesso em: 14 out. 2024.

Relatório Promat aula 7 – (26/10/2024)

Neste dia havia 12 alunos na aula, sendo que uma aluna chegou às 08h18. Começamos a aula falando que iriamos trabalhar o conceito de trigonometria, pedimos então para que um dos alunos lessem as informação que estava no slide. Enquanto um aluno lia o professor explicava, foi comentado sobre o macete do só ca toa, alguns alunos já conheciam. Porém o professor explicou o que era para aqueles que ainda não conhecia, fazendo passo a passo e utilizando um triângulo feito no quadro para os alunos relacionarem.

Foi passado um exemplo para que os alunos resolvessem, enquanto eles tentavam resolver passávamos na mesa auxiliando no desenvolvimento da questão. Após o tempo destinado foi feita a correção do exercício no quadro com a participação dos alunos, onde eles participavam ativamente da resolução, falando os cálculos e os passos que deveriam ser feitos.

Pedimos para os alunos se organizarem em duplas para que eles participassem da atividade a seguir, então uma aluna foi acordar a sua amiga que estava dormindo para fazer dupla com ela. Foi entregue os materiais necessários para que eles realizassem a dinâmica para calcular a altura com um medidor de ângulos.

Após todos os alunos receberem o material foi explicado o que eles iam fazer com o material que eles tinham para montar o material que iriamos utilizar, com o material construído foi explicado como seria realizada a atividade. Então quando foi liberado para os alunos realizarem a atividade eles estavam desanimados e poucos participativos, foi pedido para que eles levantassem e realizasse a atividade. Assim os alunos realizaram a atividade com o auxílio dos professores.

Ao voltar do intervalo, falamos para os alunos continuarem fazendo a atividade proposta anteriormente. Auxiliamos os alunos em cada passo e tiramos as dúvidas presentes dos alunos, avisamos que daríamos mais cinco minutos para que eles finalizassem a atividade, após o tempo disponibilizado foi chamada a atenção dos alunos para que voltassem em seus lugares que iria ser feito um exemplo no quadro para que eles entendessem como calculasse.

Ao retomar o conteúdo, começamos a discorrer sobre os ângulos notáveis. Um dos alunos foi até o quadro como voluntário para mostrar como que se encontra o $sen(45º)$. Enquanto ele estava no quadro os alunos prestaram bastante atenção e o auxiliaram. Em seguida, explicamos como se encontrava o $cos(45º)$, com auxílio de um aluno, que foi falando o passo a passo de como fazer. Na dedução da tangente os alunos também nos auxiliaram conforme registrávamos os passos no quadro.

Após isso, foi calculado o $sen(30º)$, $cos(30º), tg(30º)$, os alunos prestaram bastante atenção nas explicações e respondiam as perguntas feitas pelo professor assim participando da explicação, também foi feita a explicação do $sen(60º), cos\ (60º)\ e\ tg(60º)$, os alunos já estavam alguns bastante disperso da aula, porém ainda tinha alunos que estava prestando atenção e auxiliando na resolução.

Após a explicação, foi cantada a música jingle bells da trigonometria duas vezes e a professora regente fez no quadro como curiosidade a tabela trigonométrica com 0º,30º,40º,60º e 90º, assim finalizando a aula.

2.8 AULA 08 (09/11/2024) – PLANO DE AULA E RELATÓRIO

PLANO DE AULA 8 – (09/11/2024)

Fabrício Adriel Rustick
Maíri Poeta Castilho da Silva
Michelli Neves Lavagnoli
Milleni Ferreira de Souza

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio
Tempo de execução: 4 horas-aula
Conteúdo: Trigonometria
Objetivo Geral: Revisar conceitos referentes à trigonometria produzir o círculo trigonométrico.
Objetivos Específicos:
Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Produzir um círculo trigonométrico;
- Reconhecer os ângulos no círculo trigonométrico;
- Identificar os quadrantes em que seno, cosseno e tangente são positivos ou negativos;
- Compreender a definição de radianos e quais são as relações fundamentais do seno e cosseno;
- Conhecer a soma e o produto do seno e cosseno;
- Realizar exercícios referentes ao conteúdo.

Recursos Didáticos: uma folha de cartolina ou papel cartão, uma régua, um transferidor, uma tesoura, lápis, caneta, borracha, caderno,o, computador, quadro, giz, apagador.

Encaminhamento metodológico:

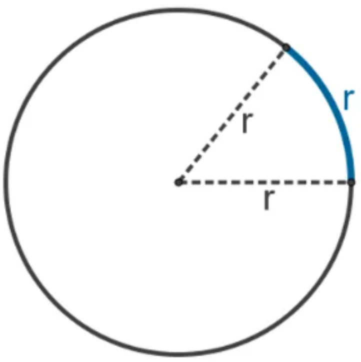
1- **Definição de radiano (20 min)**

Considerando uma circunferência de raio r e um de seus arcos com comprimento também igual a r, dizemos que esse arco tem comprimento de 1 rad (radiano).

Ou seja, 1 radiano corresponde a um arco de comprimento r em uma circunferência de raio r. Como cada arco está associado a um ângulo central, as medidas em radianos também se relacionam com esses ângulos.

A imagem abaixo ilustra um círculo com o arco que possui comprimento de 1 rad.

Figura 61 – Circunferência de raio r



Fonte: MUNDO EDUCAÇÃO

Radianos em função de π

Embora radianos e graus sejam unidades diferentes, ambas medem a mesma grandeza, o que torna comum a necessidade de convertê-las. Portanto, é essencial entender como fazer essa conversão.

Desde a antiguidade, foi observado experimentalmente que o comprimento de meio arco de uma circunferência, dividido pelo raio, resulta sempre em um valor constante, aproximadamente 3,141592, conhecido como o número π (pi).

Sabendo que meia circunferência corresponde a 180°, temos a relação:

$$\pi\, rad \;=\; 180°.$$

Com base nessa relação, podemos converter qualquer medida de radianos para graus, e vice-versa, utilizando uma regra de três simples. Ao final da explicação pediremos aos alunos que falem valores em graus para calcularmos ele em radianos.

2- Círculo trigonométrico (90 min)

Vamos iniciar o conteúdo explicando o que é o círculo trigonométrico.

O círculo trigonométrico, também chamado de ciclo ou circunferência trigonométrica, é uma é uma ferramenta utilizada para estender o conceito de relações trigonométricas para ângulos quaisquer, generalizando as relações estabelecidas simplesmente para o triângulo.

De acordo com a simetria do círculo trigonométrico temos que o eixo vertical corresponde ao seno e o eixo horizontal ao cosseno. Cada ponto dele está associado aos valores dos ângulos.

A medida de um arco no círculo trigonométrico pode ser dada em graus (º) ou em radianos (rad).

- 1º corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência, ou seja, a circunferência é dividida em 360 partes iguais ligadas ao centro, sendo que cada uma delas apresenta um ângulo que corresponde a 1º.
- 1 radiano corresponde à medida de um arco da circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência do arco que será medido.

Após a explicação, vamos entregar para os alunos um roteiro, para que eles construam um círculo trigonométrico.

Círculo trigonométrico roteiro:

Material necessário: uma folha de cartolina ou papel cartão, uma régua, um transferidor, uma tesoura, lápis, caneta e borracha.

Passo a Passo:

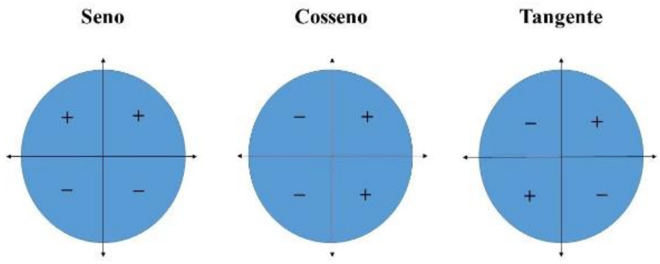
1) Desenhe uma circunferência de 10 cm de raio. Iremos convencionar que a medida do raio é de 1 unidade. (10 cm = 1 unidade);
2) Agora, tendo o centro da circunferência como ponto em comum, desenhe duas retas perpendiculares. Observe que a circunferência ficou dividida em quatro partes iguais. Cada parte recebe o nome de quadrante. Essas retas são chamadas de eixo horizontal e eixo vertical;
3) Com o auxílio de uma régua, divida os eixos da seguinte forma: a partir do centro em 10 partes iguais até a circunferência, ou seja, cada eixo ficará dividido em 20 partes iguais. Como convencionamos que raio mede 1 unidade, a partir do centro numere essas partes como numa reta numérica onde o zero é o ponto de encontro dos eixos. Ou seja: 1 cm na régua corresponde 0,1 unidade de raio;
4) Com o auxílio de um transferidor dívida a circunferência de 10º em 10º. Marque esses pontos e anote a medida dos ângulos no sentido anti-horário;
5) Agora, corte dois canudos de 11 cm de comprimento e prenda-os com um percevejo. Pegue uma extremidade e prenda no cento da circunferência.

Explorando o material:

a) Para quais ângulos o seno é positivo? E negativo? Eles pertencem a qual quadrante?
b) Para quais ângulos o cosseno é positivo? E negativo? Eles pertencem a qual quadrante?
c) Para quais ângulos a tangente é positivo? E negativo? Eles pertencem a qual quadrante?
d) O que acontece com a tangente dos ângulos de 90º e 270º?

Depois que a turma respondeu às questões acima, vamos marcar os valores de seno, cosseno e a tangente de acordo com o quadrante que eles estão, como mostra a figura 1.

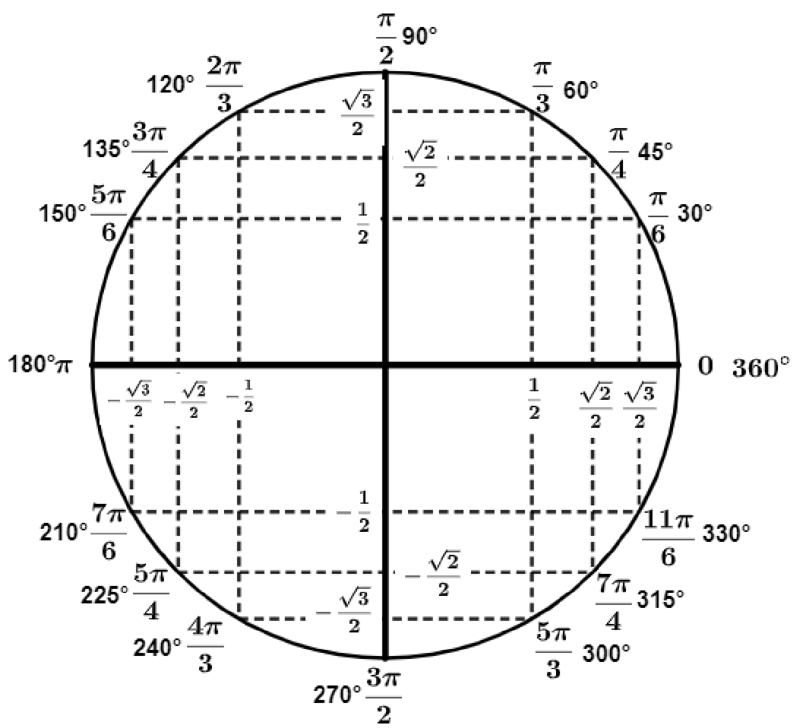
Figura 62 – Sinal do valor dos ângulos



Fonte: Toda Matéria

Após montarmos o círculo trigonométrico com eles, vamos entregar um círculo trigonométrico impresso como o da figura 2.

Figura 63 – Círculo trigonométrico



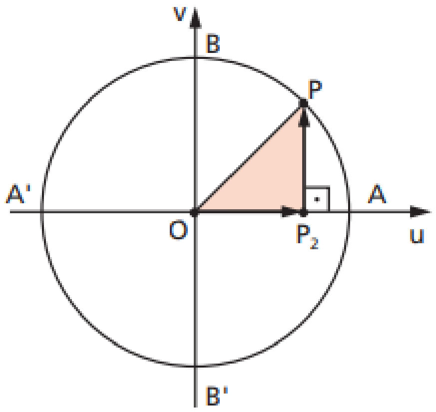
Fonte: Produção dos autores.

Utilizando o círculo trigonométrico construído pelos alunos e o círculo trigonométrico que entregamos, vamos ensinar aos alunos como utilizá-lo.

3- Relações fundamentais (20 min)

Como vimos anteriormente, o ciclo trigonométrico possui eixos que representam as linhas trigonométricas. Além disso, por definição possui raio unitário. Observe a figura abaixo:

Figura 64 – Eixos do círculo trigonométrico



Fonte: IEZZI, Gelson (2013)

Temos o triângulo retângulo OP_2P, portanto vale o teorema de Pitágoras:

$$|OP_2|^2 + |P_2P|^2 = |OP|^2$$

Ou seja:

$$\mathbf{cos^2x + sen^2x = 1}$$

Exemplo:

Sendo x um arco do 2º quadrante e $\mathrm{sen}(x) = 0{,}8$, calcule o valor de x.

Resolução:

Podemos utilizar a relação fundamental que nos diz que $\mathrm{sen}^2x + \cos^2x = 1$.

Substituindo o valor de $\mathrm{sen}(x)$, temos que:

$$0{,}8^2 + \cos^2x = 1$$

$$0{,}64 + \cos^2x = 1$$

$$\cos^2x = 1 - 0{,}64$$

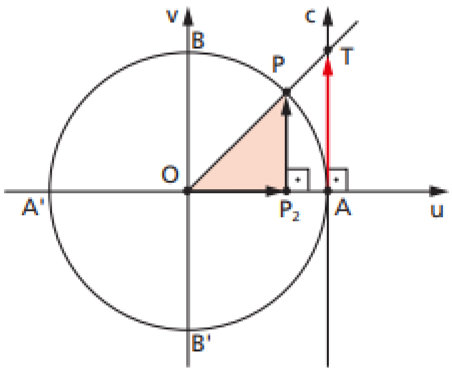
$$\cos^2x = 0{,}36$$

$$\cos(x) = \pm\sqrt{0{,}36}$$
$$\cos(x) = \pm 0{,}6$$

Como x é um arco do 2º quadrante sabemos que o valor de seu cosseno é negativo, portanto, $\cos(x) = -0{,}6$.

Vamos considerar agora também o eixo das tangentes, assim temos:

Figura 65 – Círculo trigonométrico com o eixo das tangentes



Fonte: IEZZI, Gelson (2013)

Podemos observar que o segmento $\overline{AT}$ é paralelo ao segmento $\overline{P_2P}$, portanto temos que $\triangle\, OAT \sim \triangle\, OP_2P$. Assim,

$$\frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|P_2P|}{|OP_2|}$$
$$\frac{|tg(x)|}{1} = \frac{|sen(x)|}{|\cos(x)|}$$

Usando o quadro de sinais a seguir, observemos que o sinal de $tg(x)$ é igual ao sinal do quociente $\frac{sen(x)}{\cos(x)}$:

Figura 66 – Sinal da tangente de acordo com o quadrante

Q	sinal de tg x	sinal de $\frac{\text{sen x}}{\text{cos x}}$
1º	+	+
2º	−	−
3º	+	+
4º	−	−

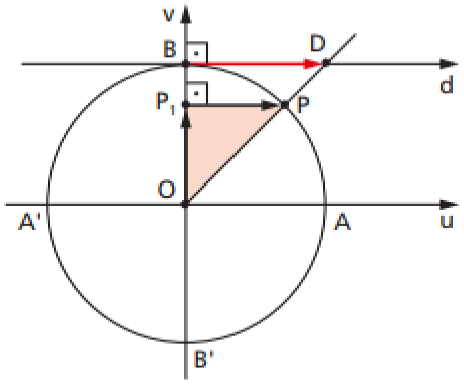
Fonte: IEZZI, Gelson (2013)

Logo,

$$\mathbf{tg(x)} = \frac{\mathbf{sen(x)}}{\mathbf{cos(x)}}$$

Observemos agora o eixo das cotangentes:

Figura 67 – Eixo das cotangentes



Fonte: IEZZI, Gelson (2013)

Temos que: $\triangle\, \mathrm{OBD} \sim \triangle\, \mathrm{OP_1P}$, então:

$$\frac{|\mathrm{BD}|}{|\mathrm{OB}|} = \frac{|\mathrm{P_1P}|}{|\mathrm{OP_1}|}$$

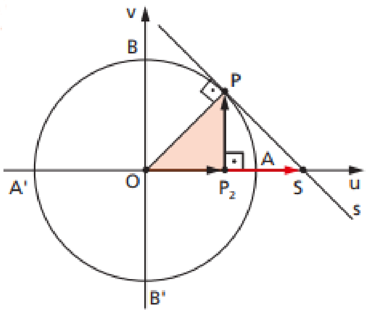
$$\frac{|\mathrm{cotg(x)}|}{1} = \frac{|\cos(\mathrm{x})|}{|\mathrm{sen(x)}|}$$

Como o sinal de $\mathrm{cotg(x)}$ é sempre o mesmo que o sinal de $\frac{\cos(\mathrm{x})}{\mathrm{sen(x)}}$, segue que:

$$\mathbf{cotg(x)} = \frac{\mathbf{cos(x)}}{\mathbf{sen(x)}}$$

Vamos considerar agora o eixo das secantes:

Figura 68 – Eixo das secantes



Fonte: IEZZI, Gelson (2013)

Temos que $\triangle\, \mathrm{OPS} \sim \triangle\, \mathrm{OP_2P}$, logo:

$$\frac{|\mathrm{OS}|}{|\mathrm{OP}|} = \frac{|\mathrm{OP}|}{|\mathrm{OP_2}|}$$

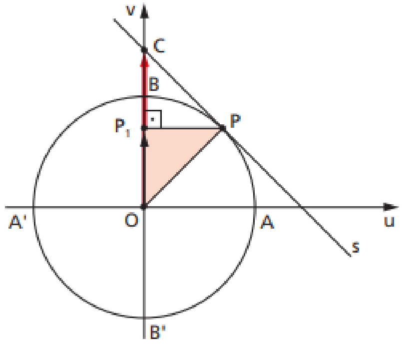
$$\frac{|\mathrm{sec(x)}|}{1} = \frac{1}{|\mathrm{cos(x)}|}$$

Como o sinal de $\mathrm{sec\,(x)}$ é sempre igual ao sinal de $\mathrm{sen(x)}$, podemos concluir que:

$$\mathbf{sec(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{co\,s(x)}}$$

Vamos considerar agora o eixo das cossecantes:

Figura 69 – Eixo das cossecantes



Fonte: IEZZI, Gelson (2013)

Temos que $\triangle\ \mathrm{OPC} \sim \mathrm{OP_1P}$, logo:

$$\frac{|\mathrm{OC}|}{|\mathrm{OP}|} = \frac{|\mathrm{OP}|}{|\mathrm{OP_1}|}$$

$$\frac{\mathrm{cossec(x)}}{1} = \frac{1}{|\mathrm{sen(x)}|}$$

Como o sinal de $\mathrm{cossec(x)}$ é sempre igual ao sinal de $\mathrm{sen(x)}$, podemos concluir que:

$$\mathbf{cossec(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen(x)}}$$

Assim, sendo x um número real, temos as seguintes relações fundamentais:

$$\mathrm{sen^2(x) + cos^2(x) = 1}$$

$$\mathrm{tg(x)} = \frac{\mathrm{sen(x)}}{\mathrm{cos(x)}}, \qquad \mathrm{(x)} \neq \frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi$$

$$\mathrm{cotg(x)} = \frac{\mathrm{cos\ (x)}}{\mathrm{sen(x)}}, \qquad \mathrm{x} \neq \mathrm{k}\pi$$

$$\mathrm{sec\ (x)} = \frac{1}{\mathrm{cos\ (x)}}, \qquad \mathrm{x} \neq \frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi$$

$$\mathrm{cossec(x)} = \frac{1}{\mathrm{sen(x)}}, \qquad \mathrm{x} \neq \mathrm{k\pi}$$

Exercício para os alunos: Dado o valor $\mathrm{sen(x)} = -\frac{1}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ determine o valor das funções trigonométricas $\mathrm{cos(x)}$, $\mathrm{tg(x)}, \mathrm{cotg(x)}, \sec(x)$ $e\ cossec(x)$.

Resolução:

Para encontrar esses valores podemos utilizar as relações fundamentais.

$$\mathrm{sen^2x} + \cos^2\mathrm{x} = 1$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\mathrm{x} = 1$$

$$\cos^2\mathrm{x} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\cos^2\mathrm{x} = \frac{3}{4}$$

$$\cos(\mathrm{x}) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{tg(x)} = \frac{\mathrm{sen(x)}}{\cos(\mathrm{x})}$$

$$\mathrm{tg(x)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\mathrm{tg(x)} = \frac{-1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{tg(x)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{cotg(x)} = \frac{\cos(\mathrm{x})}{\mathrm{sen(x)}}$$

$$\mathrm{cotg(x)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}}$$

$$\mathrm{cotg(x)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{-1}$$

$$\mathrm{cotg(x)} = -\sqrt{3}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sec(x) = 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{cossec}(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}$$

$$\mathrm{cossec}(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{cossec}(x) = -2$$

4- Soma e multiplicação de arcos (40 min)

Seno: Para calcular o valor do seno da adição de dois arcos “a” e “b”, usamos a seguintes fórmulas:

$$sen\ (a + b) = sen\ a . cos\ b + sen\ b . cos\ a$$

Macete para lembrar: Minhas terras têm palmeiras onde canta o sabiá, seno a cosseno b seno b cosseno a

Fazendo $a = b$, obteremos a fórmula do seno do dobro do arco ou do arco duplo:

$$sen\ (2a) = 2. sen\ a . cos\ a$$

Exemplo: Qual o valor de $sen\ 120°$?

Solução:

$$sen\ 120º = sen\ 2.60º = 2\ sen\ 60º.cos\ 60º$$

$$sen120º = 2\ \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow sen\ 120º = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo: Qual o valor de $sen\ 105º$?

Solução:

$$sen\ 105º = sen\ (60º + 45º) = sen\ 60º.cos\ 45º + sen\ 45º.cos\ 60º$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Cosseno: Cosseno da soma entre arcos “a” e “b”, usamos a seguinte fórmula:

$$cos\ (a + b) = cos\ a\ .cos\ b - sen\ a\ .sen\ b$$

Macete para a formula: Coça A Coça B + Senta A Senta B

Para encontrar uma fórmula para o **cosseno** de um **arco duplo**, basta fazer $b = a$ e substituir, por exemplo, “b” por “a” na fórmula acima:

$$cos\ (a + a) = cos\ a\ .cos\ a - sen\ c\ sen\ a$$

$$cos\ (2a) = cos2a - sen2a$$

Exemplo: Qual o $cos\ 75º = cos\ (30º + 45)$?

Solução:

$$cos\ 30º\ .cos\ 45º + sen\ 30º.sen\ 45º$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Tangente: Tangente da soma entre os arcos “a” e “b”

$$\text{tg}\ (a + b) = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a\ .\text{tg}\ b}$$

Macete da fórmula: Tem gente que Ama e tem gente que beija, huum tem gente que ama e beija. No entanto, essa fórmula, de fato, foi deduzida a partir da relação entre tangente, seno e cosseno e do seno e cosseno da soma.

A tangente de um arco duplo é obtida fazendo a = b e substituindo “b” por “a” na fórmula acima:

$$\mathrm{tg}\ (a+b) = \frac{\mathrm{tg}\ a + \mathrm{tg}\ b}{1 - \mathrm{tg}\ a\ .\ \mathrm{tg}\ b}$$

$$\mathrm{tg}\ (a+a) = \frac{\mathrm{tg}\ a + \mathrm{tg}\ a}{1 - \mathrm{tg}\ a\ .\ \mathrm{tg}\ a}$$

$$\mathrm{tg}\ (2a) = \frac{2\ \mathrm{tg}\ a}{1 - \mathrm{tg}^2 a}$$

Exemplo: Calcule a tangente de 105º?

$$\mathrm{tg}\ (105) = \mathrm{tg}\ (45+60) = \frac{\mathrm{tg}\ 45 + \mathrm{tg}\ 60}{1 - \mathrm{tg}\ 45\ .\ \mathrm{tg}\ 60} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

Multiplicando pelo conjugado:

$$\frac{(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})} . \frac{(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2}$$

5- Exercícios (30 min)

1- Determine em qual quadrante está localizado o ângulo de 2735º no sentido positivo.

Resolução: terceiro quadrante.

2- Analise as afirmativas abaixo e responda se são verdadeiras ou falsas:

(V) Ao calcular a tangente de 140º, o valor será negativo.

(F) o ângulo de 200º é um ângulo do 2º quadrante.

(V) seno 130º = seno 50º.

3- Para que valores de a temos, simultaneamente, $\operatorname{sen}(x) = a + 1$ e $\cos(x) = a$?

Resolução:

Usando a relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e substituindo, temos:

$$(a+1)^2 + (a)^2 = 1$$

$$a^2 + 2a + 1 + a^2 - 1 = 0$$

$$2a^2 + 2a = 0$$

$$a(2a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ 2a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1 \end{cases}$$

Portanto, $a = 0$ ou $a = -1$.

Avaliação: A avaliação será realizada por meio da resolução dos exercícios e da participação ativa na aula.

REFERÊNCIAS

ALGO SOBRE. **Trigonometria: multiplicação e divisão de arcos**. Disponível em: https://www.algosobre.com.br/matematica/trigonometria-multiplicacao-e-divisao-de-arcos.html. Acesso em: 16 out. 2024.

ASTH, Rafael C. **Círculo Trigonométrico**. Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/. Acesso em: 12 out. 2024.

CHIAPINOTTO, E. L.; LUTZ, M. R. **Trigonometria**: Relações Trigonométricas. Matemática II. Santa Maria, UFSM, 2020, p. 60-61. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/705120/2/1%20SII%20Trigonometria.pdf. Acesso em: 15 out. 2024.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos De Matemática Elementar:** Trigonometria. São Paulo: Atual, 2013. Cap. V. p. 61–71.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Fórmulas do arco duplo**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/formulas-arco-duplo.htm. Acesso em: 16 out. 2024.

Proenem. **Trigonometria** – Relação fundamental e suas consequências. Disponível em: https://proenem.com.br/enem/matematica/relacao-fundamental-e-suas-consequencias/. Acesso em: 02 nov. 2024.

SILVA, Douglas. **Soma e diferença de arcos**. YouTube, 21 set. 2021. Disponível em: https://youtu.be/NWF4JRWg6rI. Acesso em: 16 out. 2024.

Relatório Promat aula 8 – (09/11/2024)

No dia 09 de novembro de 2024 realizamos o 8º encontro do PROMAT, no qual compareceram 14 alunos. Para essa aula havíamos programado conteúdos em torno de trigonometria, como a conceituação do círculo trigonométrico, definição de radianos, relações fundamentais da trigonometria e soma e multiplicação de arcos.

Apesar do horário previsto de 08:00h para iniciar a aula, esperamos 10 minutos para iniciar pois alguns alunos estavam atrasados. Inicialmente comunicamos aos alunos que no sábado seguinte não haveria aula devido a recesso do feriado de Proclamação da República. Além disso, comentamos sobre a organização dos últimos dois encontros, explicamos que no nono dia de aula ocorrerá aula normal e que no decimo será realizada uma gincana em conjunto com as outras turmas do Promat.

Para iniciar as discussões em torno do conteúdo programado, questionamos aos alunos se eles sabiam o que é ‘radiano’, um dos alunos respondeu ‘que é o raio’, pedimos então que esse fizesse a leitura da explicação que estava no slide. Após isso, explicamos o que estava no slide e mostramos como fazer a conversão de graus para radianos e vice-versa. Após as explicações fizemos alguns exemplos de conversões e propomos alguns para que os alunos realizassem, os quais foram feitos sem dificuldades.

Consequentemente, explicamos o que é o círculo trigonométrico, dizendo que é uma ferramenta utilizada para estender o conceito de relações trigonométricas para ângulos quaisquer, generalizando as relações estabelecidas simplesmente para o triângulo. Mostramos como é possível identificar os valores das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir dessa ferramenta.

Para que os alunos compreendessem melhor, disponibilizamos material e orientamos um passo a passo para que construíssem o círculo trigonométrico. Primeiramente, pedimos que desenhassem uma circunferência de 10 cm de raio (convencionamos que a medida do raio é 1 unidade, ou seja, 10 cm = 1 unidade), em seguida, tendo o centro da circunferência como ponto em comum desenhassem duas retas perpendiculares, as quais representam o eixo horizontal e o eixo vertical.

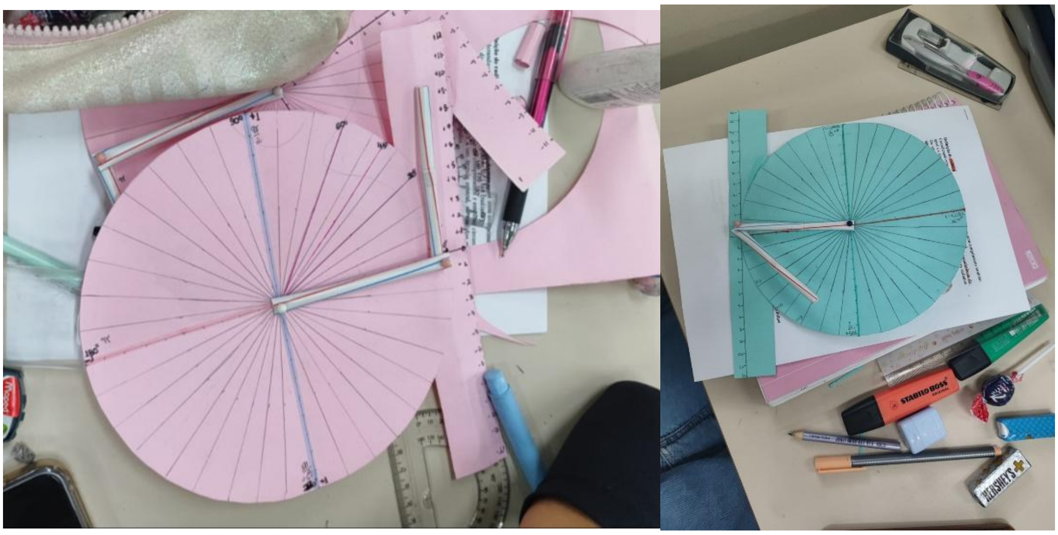
Instruímos a dividir os eixos em 10 partes iguais a partir do centro até a circunferência, assim cada eixo ficou dividido em 20 partes, os quais deviam ser enumerados tendo como referência o centro da circunferência como 0 e cada divisão corresponde a 0,1 unidade de raio. Pedimos aos alunos para que recortassem a circunferência.

Figura 70 – Construção do círculo trigonométrico com os alunos

Fonte: Acervo dos autores

Dando sequência na atividade, solicitamos que os alunos dividissem a circunferência de 10° em 10° com o auxílio do transferidor, e anotassem as medidas dos ângulos no sentido anti-horário. Por fim, disponibilizamos pedaços de canudos para os alunos prenderem ao círculo.

Figura 71 – Círculo trigonométrico produzido pelos alunos



Fonte: Acervo dos autores

De modo geral, os alunos não tiveram grandes dificuldades na construção do círculo trigonométrico, e como os acompanhamos nas etapas os auxiliamos quando tinham alguma dúvida. Ao final, fizemos alguns questionamentos para que os alunos explorassem o material e respondessem manipulando o círculo.

Dando sequência, perguntamos aos alunos se eles sabiam alguma das relações fundamentais da trigonometria e eles apenas balançaram a cabeça simbolizando que não. Mostramos então quais são as relações e fizemos a demonstração de como chegar nelas a partir do teorema de Pitágoras, nesse momento os alunos se mostraram bem participativos, contribuindo no passo a passo da demonstração. Em seguida, foram atribuídos alguns exercícios que podiam ser respondidos com o uso das relações fundamentais e um aluno se disponibilizou a apresentar a solução no quadro.

Ao final nos despedimos dos alunos e relembramos que o próximo encontro ocorreria apenas no dia 23 de novembro.

2.9 AULA 09 (23/11/2024) – PLANO DE AULA E RELATÓRIO

PLANO DE AULA 9 – (23/11/2024)

Fabrício Adriel Rustick
Maíri Poeta Castilho da Silva

Michelli Neves Lavagnoli
Milleni Ferreira de Souza

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio
Tempo de execução: 4 Horas-aula;
Conteúdo: Funções trigonométricas
Objetivo Geral: Revisar o conceito de funções trigonométricas e realizar exercícios
Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com funções trigonométricas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Produzir o gráfico das funções seno, cosseno e tangente;
- Identificar o domínio e a imagem de cada função;
- Reconhecer as funções a partir de seu gráfico;
- Identificar quando uma função é par ou ímpar;
- Compreender o período, a frequência e amplitude das funções trigonométricas;
- Realizar os exercícios propostos.

Recursos Didáticos: quadro, giz, projetor, caderno, computador, lápis, borracha, papel milimetrado, régua e caneta.
Encaminhamento metodológico:

1- Representação gráfica (90 min)

Função seno: chamamos de função seno a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que a lei de formação é representada por $f(x) = \mathrm{sen}(x)$.

Domínio e Imagem:
O conjunto de todos os valores possíveis para a variável independente é chamado de **domínio** da função, e o indicamos por $\boldsymbol{D}$ ou $\boldsymbol{D(f)}$**.**

Já o conjunto de todos os valores possíveis da variável dependente é chamado de **contradomínio** da função, e o indicamos por $\boldsymbol{CD}$ ou $\boldsymbol{CD(f)}$**.**

Por fim, **imagem** da função, indicada por $\boldsymbol{Im}$ ou $\boldsymbol{Im(f)}$, é o conjunto dos valores que a variável dependente assume quando associada aos elementos do domínio.

Domínio da função seno:

Como sabemos que a função seno vai de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o seu **domínio** está no conjunto dos números reais. Sabemos que, para todo número real, existe um $sen(x)$, então podemos afirmar que o domínio da função seno são os números reais, denotado por:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Imagem da função seno:

Observando o círculo trigonométrico, sabemos que a razão trigonométrica possui como valor máximo 1 e como mínimo -1. Desta forma, a **imagem** da função seno está no intervalo $[1, -1]$, denotado por:

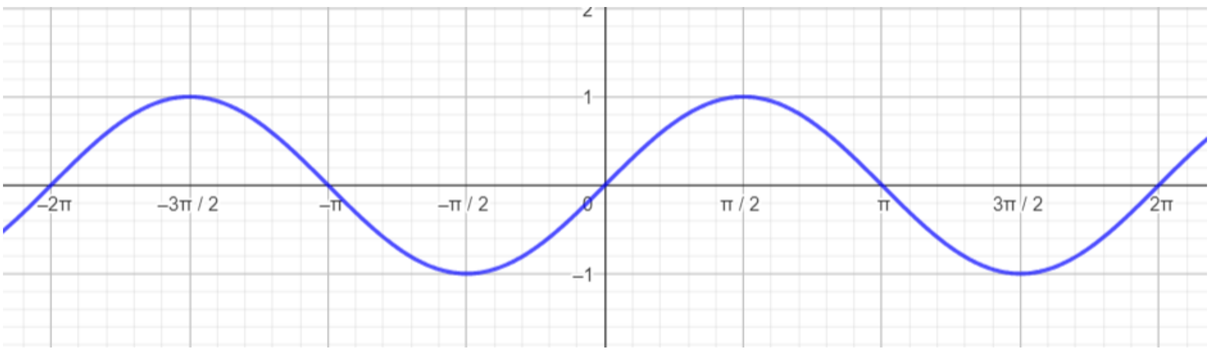
$$Im = [1, -1]$$

Representação gráfica:

Nesse momento vamos entregar um papel milimetrado aos alunos e produzir o gráfico junto com os alunos.

$f(x) = sen(x)$

Figura 72 – Representação gráfica da função $f(x) = sen(x)$

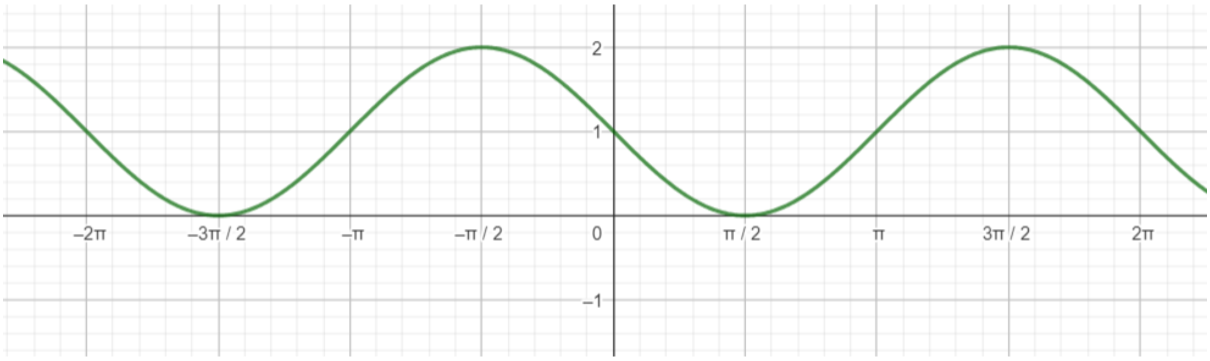


Fonte: Produção dos autores

Além disso, há quatro (a, b, c, d) parâmetros que influenciam na função seno, sendo assim chamada de função senoide. Logo, a função com seus parâmetros possui a seguinte lei de formação: $f(x) = a \pm b \times sen(c \times x + d)$.

$f(x) = 1 - sen(x)$

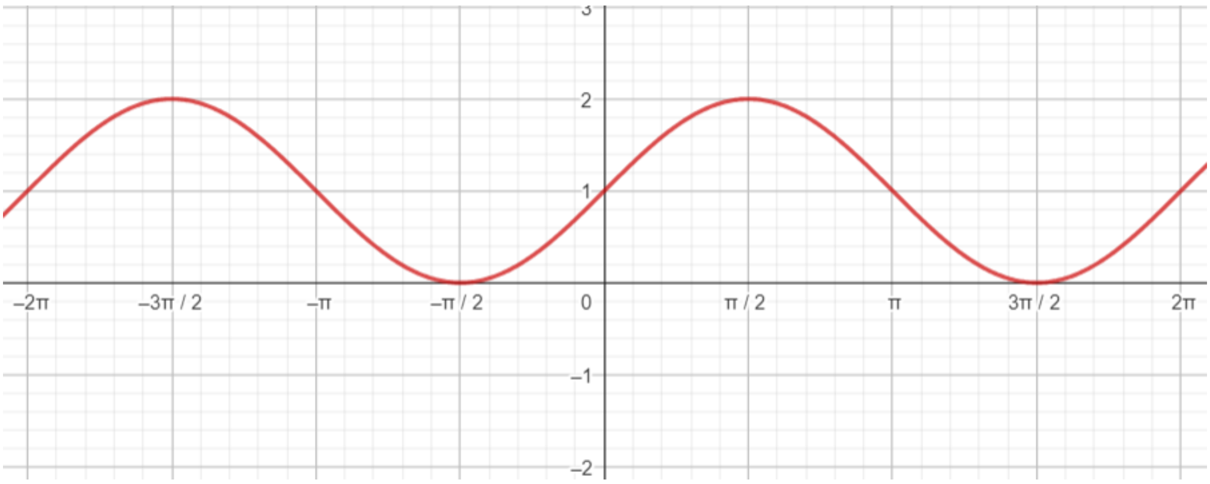
Figura 73 – Gráfico da função $f(x) = 1 - sen(x)$



Fonte: Produção dos autores

$f(x) = 1 + sen(x)$

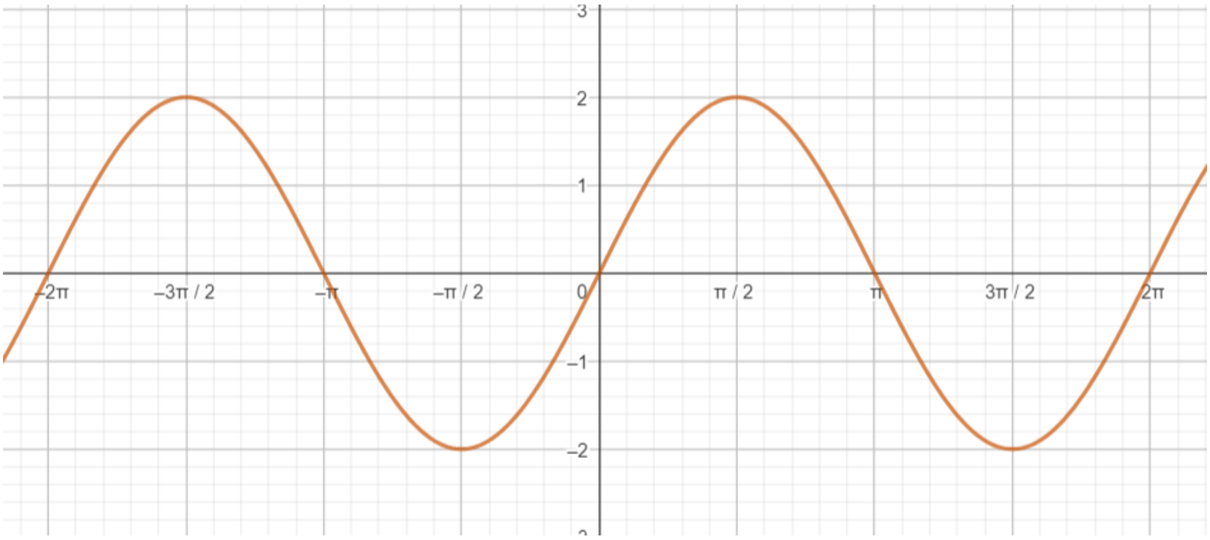
Figura 74 – Ilustração gráfica da função $f(x) = 1 + sen(x)$



Fonte: Produção dos autores

$f(x) = 2\ sen(x)$

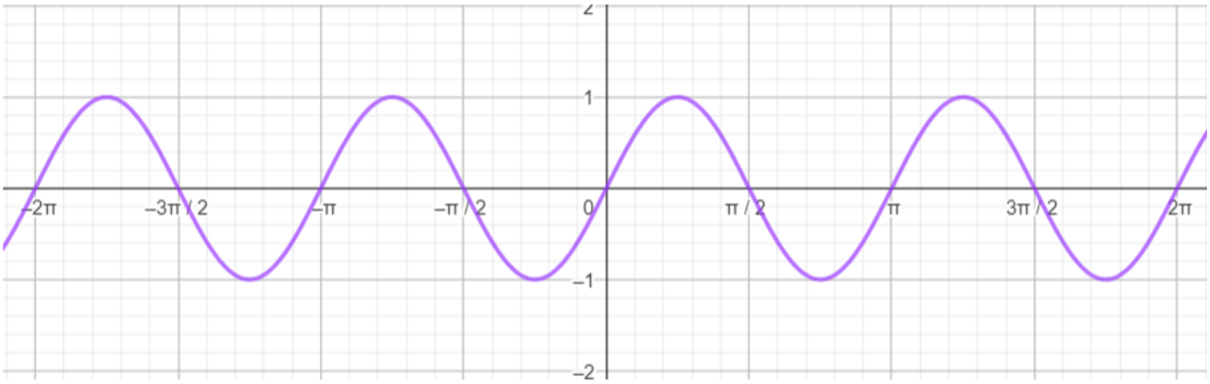
Figura 75 – Ilustração da função $f(x) = 2\ sen(x)$



Fonte: Produção dos autores

$f(x) = sen(2x)$

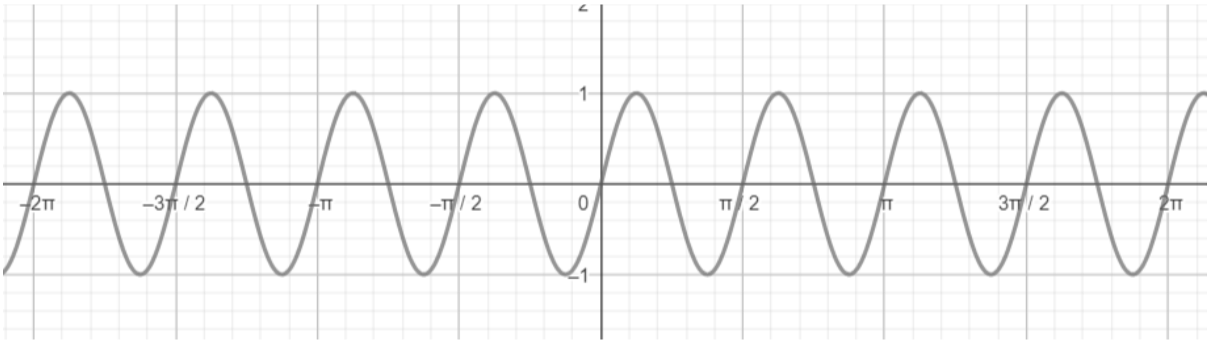
Figura 76 – Gráfico da função $f(x) = sen(2x)$



Fonte: Produção dos autores

$f(x) = sen(4x)$

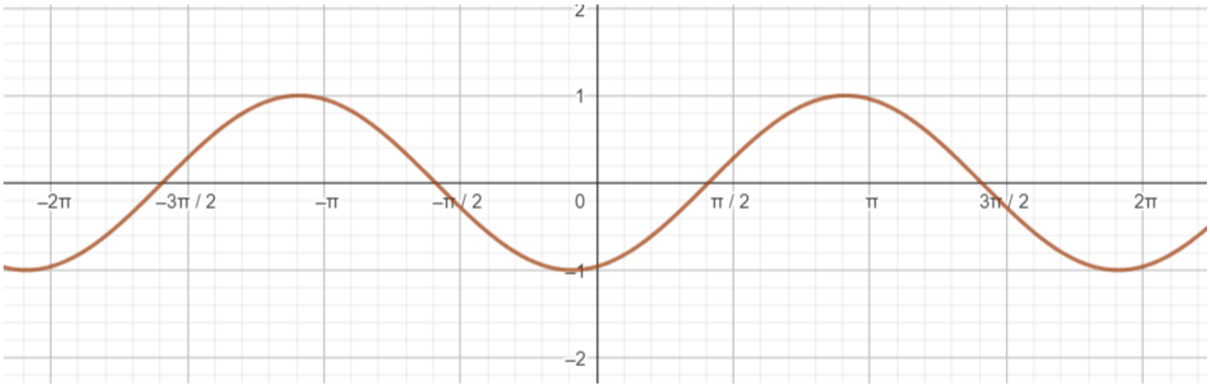
Figura 77 – Representação gráfica da função $f(x) = sen(4x)$



Fonte: Produção dos autores

$$f(x) = sen(x + 5)$$

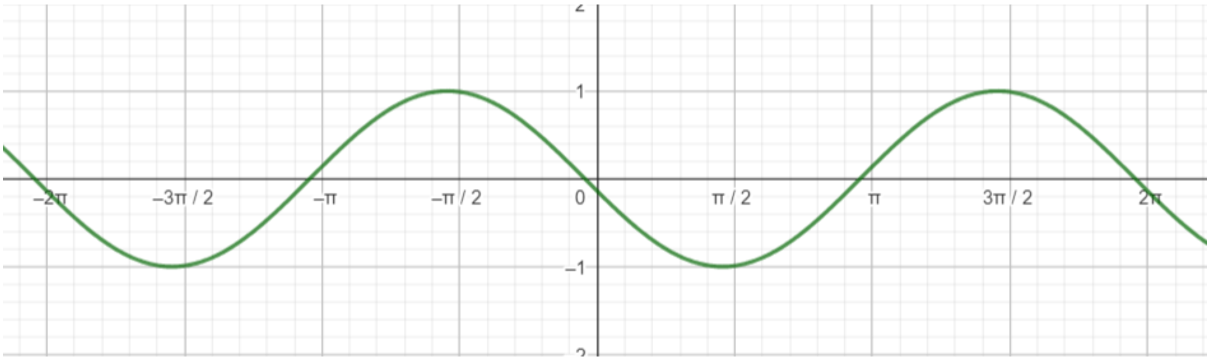
Figura 78 – Ilustração gráfica da função $f(x) = sen(x + 5)$



Fonte: Produção dos autores

$f(x) = sen(x - 3)$

Figura 79 – Gráfico da função $f(x) = sen(x - 3)$



Fonte: Produção dos autores

Função cosseno: chamamos de função cosseno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que a lei de formação é representada por $f(x) = \cos(x)$.

Domínio da função cosseno:

A função cosseno está definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, o **domínio** é o conjunto dos números reais, denotado por:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Imagem da função cosseno:

Assim como na função seno, a função cosseno possui imagem nos números reais entre 1 e -1, ou seja, a imagem da função cosseno está no intervalo fechado para $[1, -1]$, denotado por:

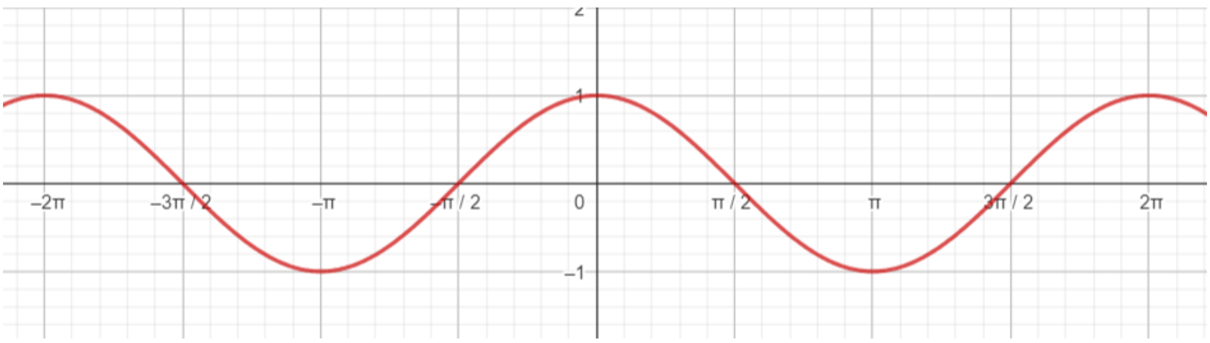
$$\mathrm{Im} = [1, -1]$$

Representação gráfica:

Os alunos irão fazer os itens abaixo e em seguida responder algumas perguntas.

$f(x) = cos(x)$

Figura 80 – Representação gráfica da função $f(x) = cos(x)$

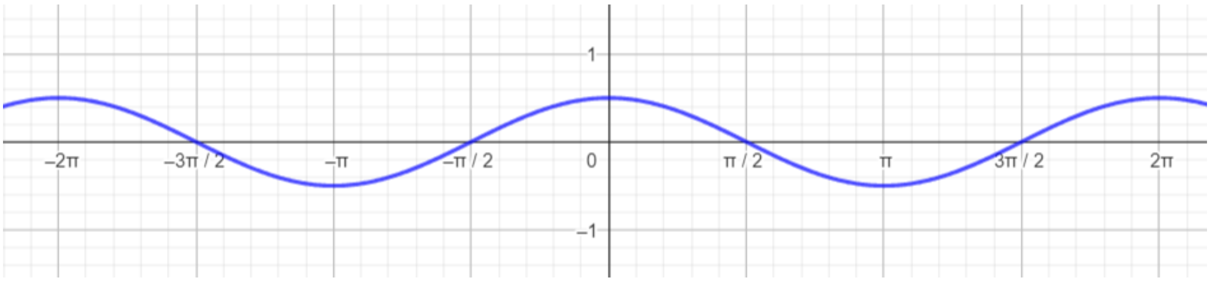


Fonte: Produção dos autores

Além disso há quatro (a, b, c, d) parâmetros que influenciam na função cosseno, sendo assim chamada de função cossenoide. Logo, a função com seus parâmetros possui a seguinte lei de formação: $f(x) = a \pm b \times cos(c \times x + d)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$$

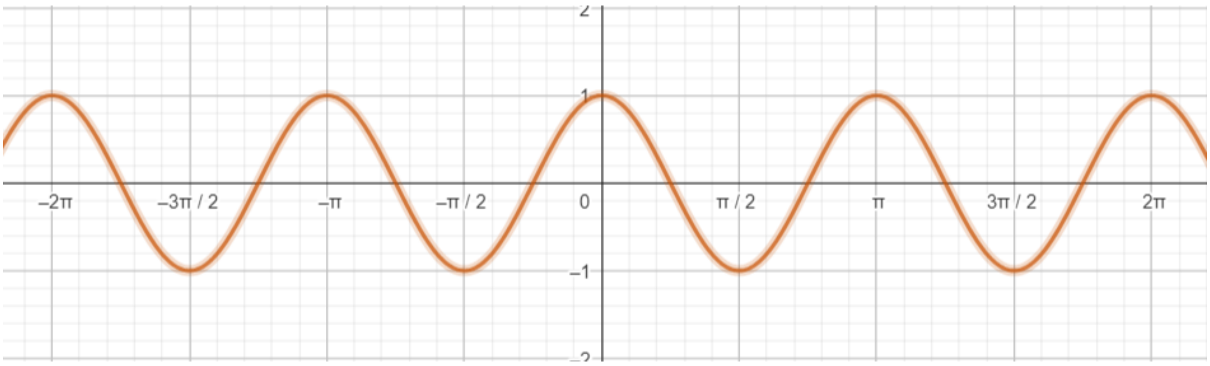
Figura 81 – Ilustração da função $f(x) = \frac{1}{2}\ cos(x)$



Fonte: Produção dos autores

$$f(x) = cos(2x)$$

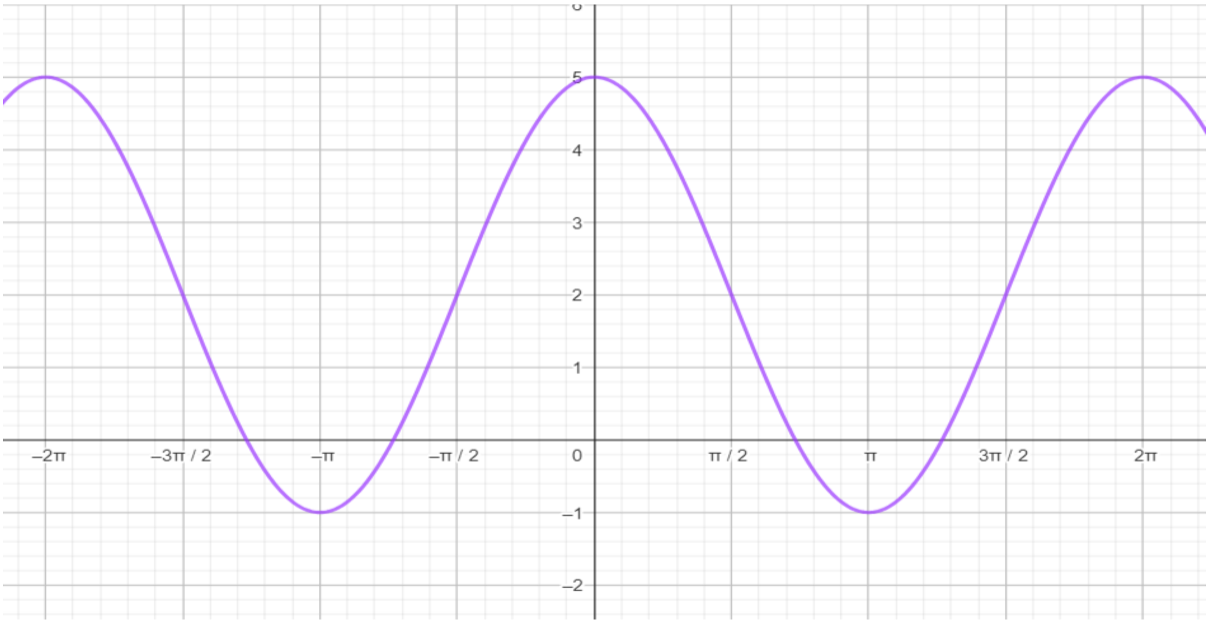
Figura 82 – Gráfico da função $f(x) = cos(2x)$



Fonte: Produção dos autores

$$f(x) = 2 + 3cos(x)$$

Figura 83 – Representação gráfica da função $f(x) = 2 + 3cos(x)$



Fonte: Produção dos autores

1) Observando os gráficos da função seno e da função cosseno, o que cada parâmetro provoca de mudança no gráfico da função?

2) Há semelhanças e diferenças entre os gráficos das funções acima? Se sim, quais?

Função tangente: a função tangente possui comportamento bem diferente das demais funções trigonométricas. Chamamos de função tangente a função em que a lei de formação é representada por $f(x) = \mathrm{tg}(x)$.

Domínio da função tangente:

A tangente é razão entre o seno e o cosseno. Para os valores que o $cos(x)$ é zero a função tangente não está definida, pois não realizamos divisão por zero. Os ângulos em que isso acontece são os ângulos de 90º, 270º e múltiplos desses ângulos. Desta forma, seu **domínio** é:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + kx, k \in \mathbb{Z}\}$$

Imagem da função tangente:

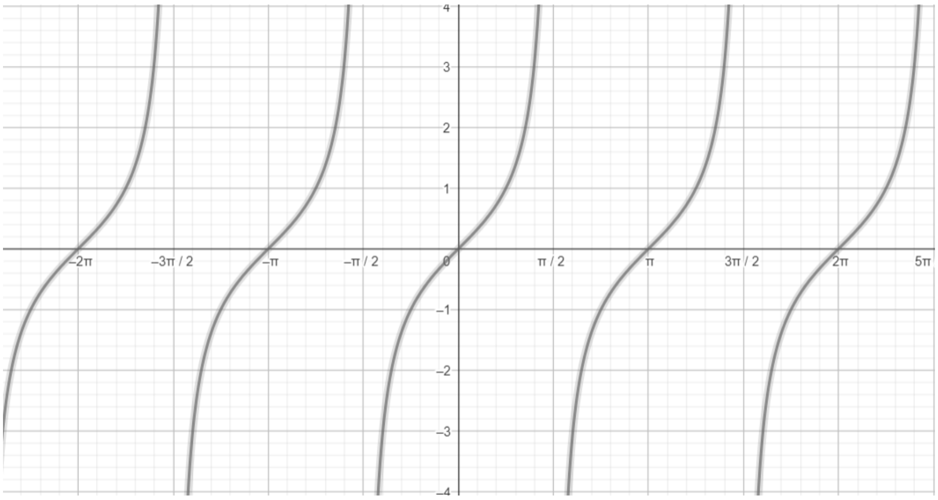
A função tangente possuiu comportamento bem diferente das demais funções trigonométricas. Desta forma, sua **imagem** está no conjunto dos números reais, denotado por:

$$\mathrm{Im} = \mathbb{R}$$

Representação gráfica:

$f(x) = tg(x)$

Figura 84 – Gráfico da função $f(x) = tg(x)$

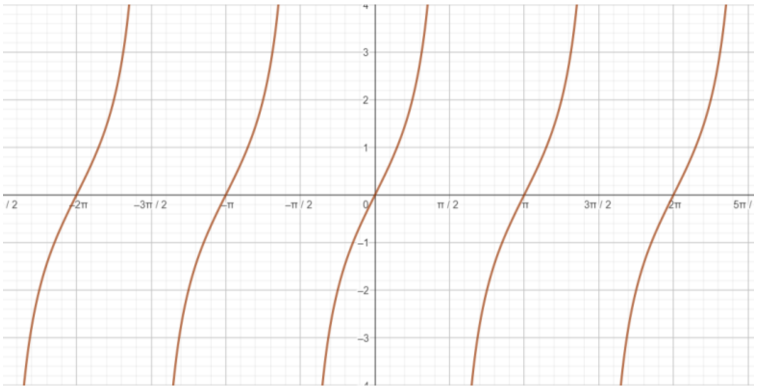


Fonte: Produção dos autores

Além disso, há quatro (a, b, c, d) parâmetros que influenciam na função tangente, sendo assim chamada de função tangentoide e sua lei de formação: $f(x) = a \pm b \times tg(c \times x + d)$.

$f(x) = 2tg(x)$

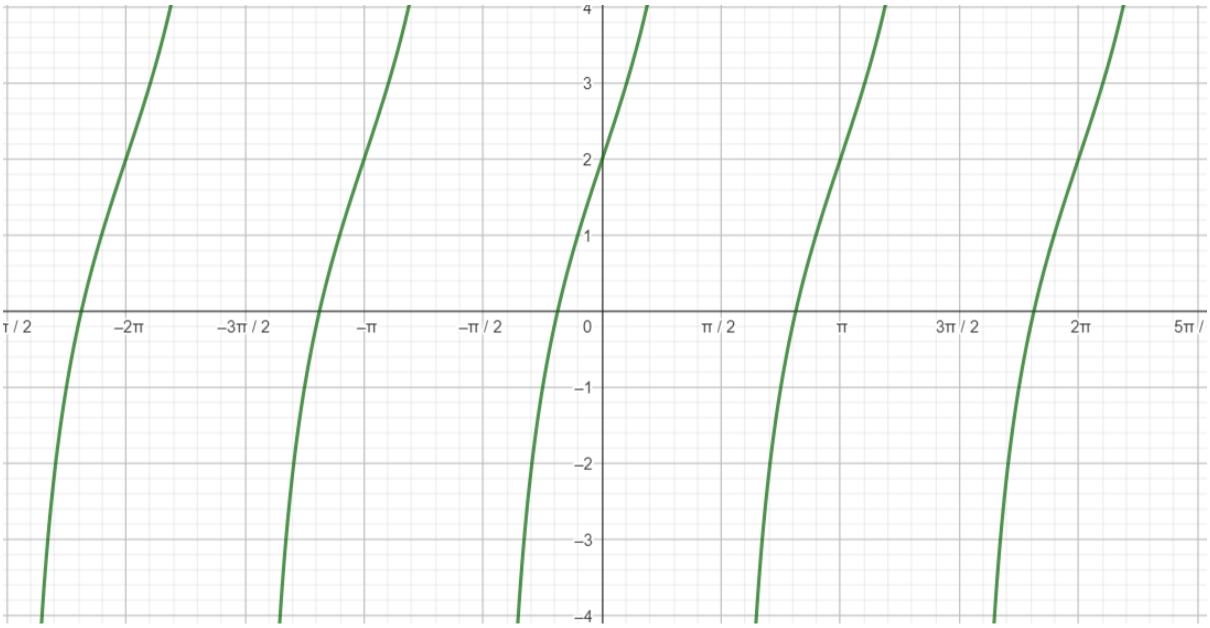
Figura 85 – Ilustração Gráfica da função $f(x) = 2tg(x)$



Fonte: Produção dos autores

$f(x) = 2 + 3tg(x)$

Figura 86 – Representação gráfica da função $f(x) = 2 + 3tg(x)$



Fonte: Produção dos autores

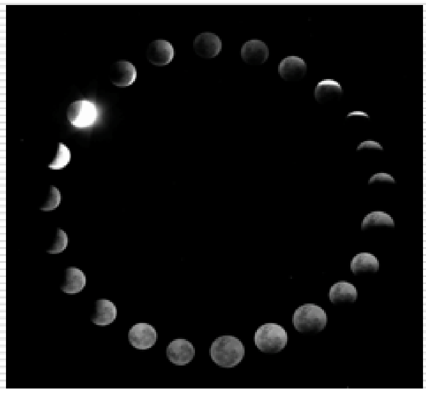
2- Período, frequência e amplitude (30 min)

O que são funções periódicas?

Para responder essa pergunta, vamos primeiro pensar em algumas situações ou fenômenos que são periódicos...

- Todos os dias o sol nasce e se põe;

- A cada 28 dias a Lua estará da mesma forma, do ponto de vista de um observador fixo na terra;



As funções trigonométricas podem ser modelos de vários fenômenos que se repetem, como:

- As variações diárias na temperatura da atmosfera terrestre;
- A pressão sanguínea;
- O nível de água em uma bacia marítima;
- A tensão e a corrente elétrica;
- O campo eletromagnético gerado para aquecer comida no micro-ondas;
- O comportamento ondulatório de notas musicais;
- Fases da Lua;
- Estações do ano, entre outros.

Se um fenômeno é sabidamente periódico, podemos prever com relativa facilidade o que ocorre em momentos não observados.

Funções Periódicas:

- São funções cujos valores se repetem em intervalos regulares;
- O período de uma função periódica f é o menor valor positivo p para o qual $f(t+p) = f(t)$, para todo t para o qual a função faz sentido.

Em outras palavras, o período é o menor intervalo de tempo em que ocorre a repetição do comportamento da função.

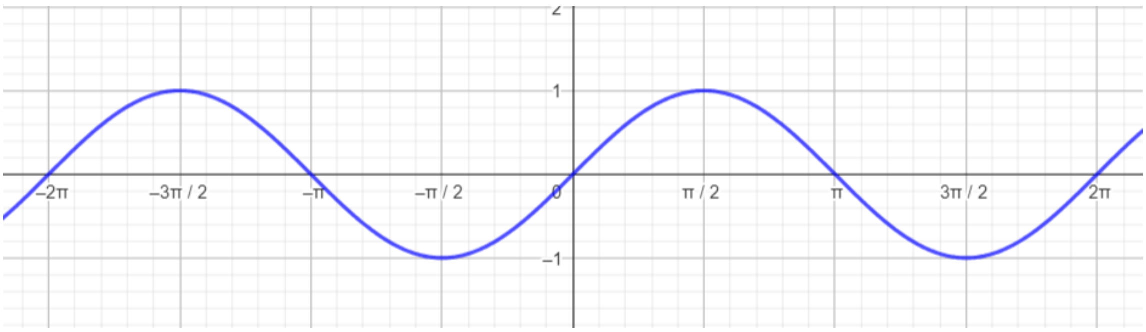
Vamos voltar a função $f(x) = sen(x)$ exposta anteriormente, vimos que o seu gráfico pode ser representado da seguinte forma:

Tabela 5 – Valores de x para seno de x

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{Sen(x)}$
$\boldsymbol{-2\pi}$	0
$\boldsymbol{-3\pi/2}$	1
$\boldsymbol{-\pi}$	0
$\boldsymbol{-\pi-2}$	-1
$\boldsymbol{0}$	0
$\boldsymbol{\pi/2}$	1
$\boldsymbol{\pi}$	0
$\boldsymbol{3\pi/2}$	-1
$\boldsymbol{2\pi}$	0

Fonte: Produção dos autores

Figura 87 – Ilustração do período da função $f(x) = sen(x)$



Fonte: Produção dos autores

Observando os dados, podemos observar que o comportamento da função se repete em períodos de 2π. Podemos verificar isso da seguinte forma:

Seja $t = -3\pi/2$, temos que $f(t) = 1$, observando o gráfico, qual seria o próximo valor em que a imagem dessa função também é 1? Podemos observar que o valor mais próximo é para $x = \pi/2$. Para identificar o período, basta calcularmos a distância entre os dois valores do domínio que tem a mesma imagem:

$$Período = \left|\frac{\pi}{2} - (-\frac{3\pi}{2})\right|$$

$$Período = 2\pi$$

Portanto, para todo x pertencente ao domínio dessa função, $f(x)$ deve ser igual à $f(x+2\pi)$. Vamos verificar a validade para alguns valores:

a) $x = 0$, $f(0) = 0$ e $f(0+2\pi) = f(\pi) = 0$

b) $x = -\pi/2$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ e $f\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

c) $x = -\pi$, $f(-\pi) = 0$ e $f(-\pi + 2\pi) = f(\pi) = 0$

Porém, observe que se tomássemos inicialmente $x = -\pi$, onde $f(x) = 0$ para determinar o período, teríamos $-2\pi\ e\ 0$, como os valores do domínio mais próximos de $-\pi$ que refletem a mesma imagem que ele, desse modo encontraríamos o período como:

$$Período = |-\pi - (-2\pi)|$$
$$Período = \pi$$

Porém o período $p = \pi$ não satisfaz a condição de que $f(x) = f(x+p)$ para todo x pertencente ao domínio da função $f(x) = sen(x)$.

Um exemplo disso e tomando $x = \pi/2$: $f(\pi/2) = 1$ e $f\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, logo $f(x) \neq f(x+p)$, portanto o período não pode ser $p = \pi$. Portanto devemos levar em consideração a definição de que o período p deve ser o menor valor tal que $f(x) = f(x+p)$, para todo x pertencente ao domínio da função.

Amplitude

A amplitude das funções seno e cosseno é obtida pela média da distância do maior ao menor valor do conjunto de imagem da função.

Por exemplo, para a função $f(x) = sen(x)$, -1 e 1 são o menor e o maior valor do conjunto de imagem respectivamente, portanto, a amplitude é dada por $\frac{|1-(-1)|}{2} = 1$

Para a função tangente, a amplitude não existe, uma vez que não tem valores máximos ou mínimos no conjunto de imagem.

Exercícios:

1- Determine o período e a amplitude das funções seno trabalhadas anteriormente

a) $f(x) = 1 - sen(x)$ Período: 2π e Amplitude: 1

b) $f(x) = 1 + sen(x)$ Período: 2π e Amplitude: 1

c) $f(x) = sen(x)$ Período: 2π e Amplitude: 1

d) $f(x) = 2sen(x)$ Período: 2π e Amplitude: 2

e) $f(x) = sen(2x)$ Período: π e Amplitude: 1

f) $f(x) = sen(4x)$ Período: $\pi/2$ e Amplitude: 1

g) $f(x) = sen(x + 5)$ Período: 2π e Amplitude: 1

h) $f(x) = sen(x - 3)$ Período: 2π e Amplitude: 1

2- Determine o período e a amplitude das funções cosseno trabalhadas anteriormente

a) $f(x) = \cos(x)$ Período: 2π e Amplitude: 1

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$ Período: 2π e Amplitude: $1/2$

c) $f(x) = \cos(2x)$ Período: π e Amplitude: 1

d) $f(x) = 2 + 3\cos(x)$ Período: 2π e Amplitude: 3

3- Determine o período das funções tangente trabalhadas anteriormente

a) $f(x) = tg(x)$ Período: π

b) $f(x) = 2tg(x)$ Período: π

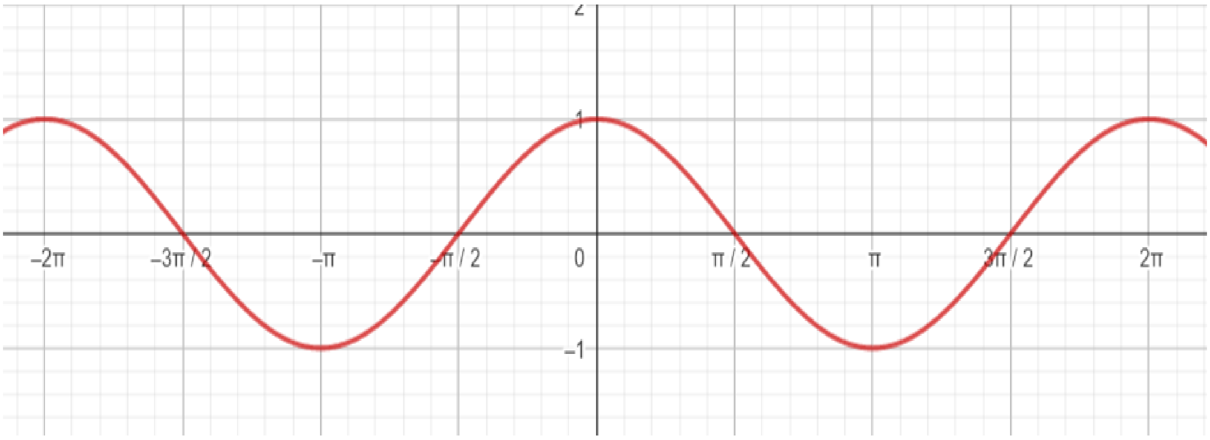
c) $f(x) = 2 + 3tg(x)$ Período: π

3- Função par e função ímpar (20 min)

Função Par: Se uma função f satisfazer $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, então f é chamada função par. O significado geométrico de uma função par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo

Exemplo: $f(x) = \cos(x)$

Figura 88 – Representação gráfica de função par



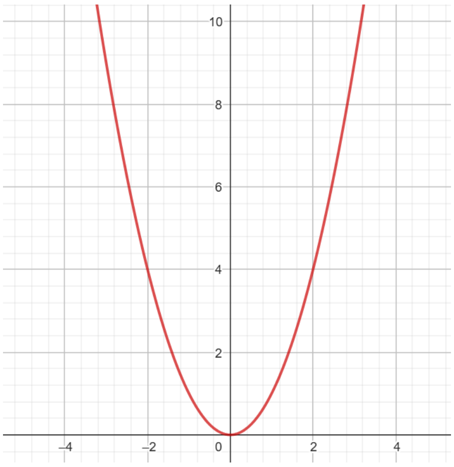
Fonte: Produção dos autores

A função cosseno é considerada uma função par, pois há uma simetria no gráfico em relação ao eixo y. Ou seja $cos(x) \; = \; cos\,(-x)$

Observando outro exemplo de uma função par:

Exemplo: $f(x) = \; x^2$

Figura 89 – Representação de função par

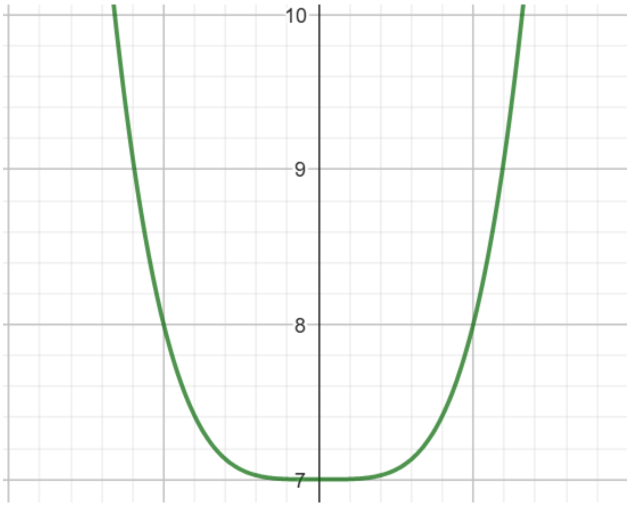


Fonte: Produção dos autores

Para qualquer valor de $x, f(x) \; = \; f(-x)$, porque o quadrado de um número é sempre positivo.

Exemplo: $f(x) = x^4 + 7$

Figura 90 – Ilustração gráfica de uma função par

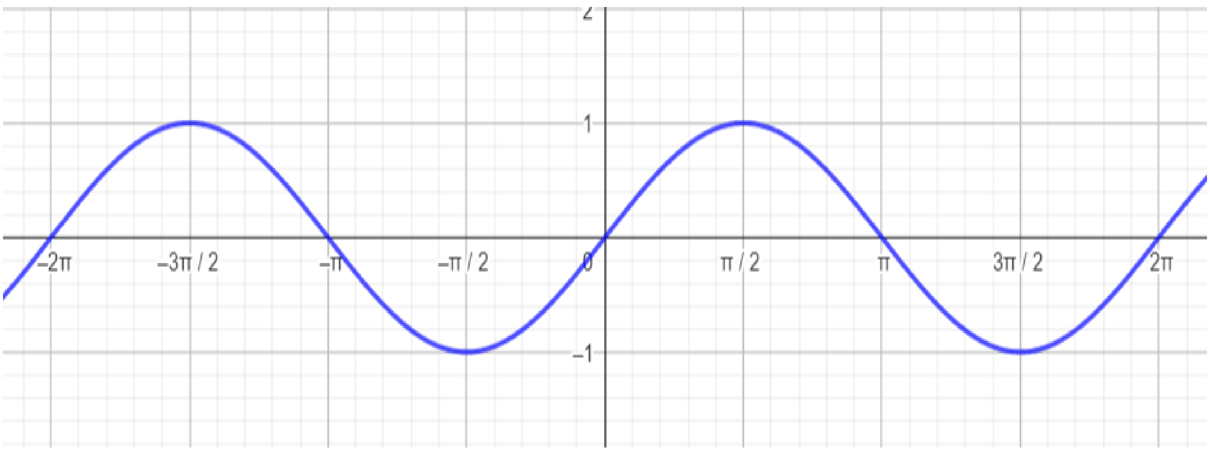


Fonte: Produção dos autores

Função Ímpar: Se uma f satisfazer $f(-x) = -f(x)$ para todo x em seu domínio, então f é chamada função ímpar. O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo: $f(x) = sen(x)$

Figura 91 – Gráfico de uma função ímpar: $f(x) = sen(x)$

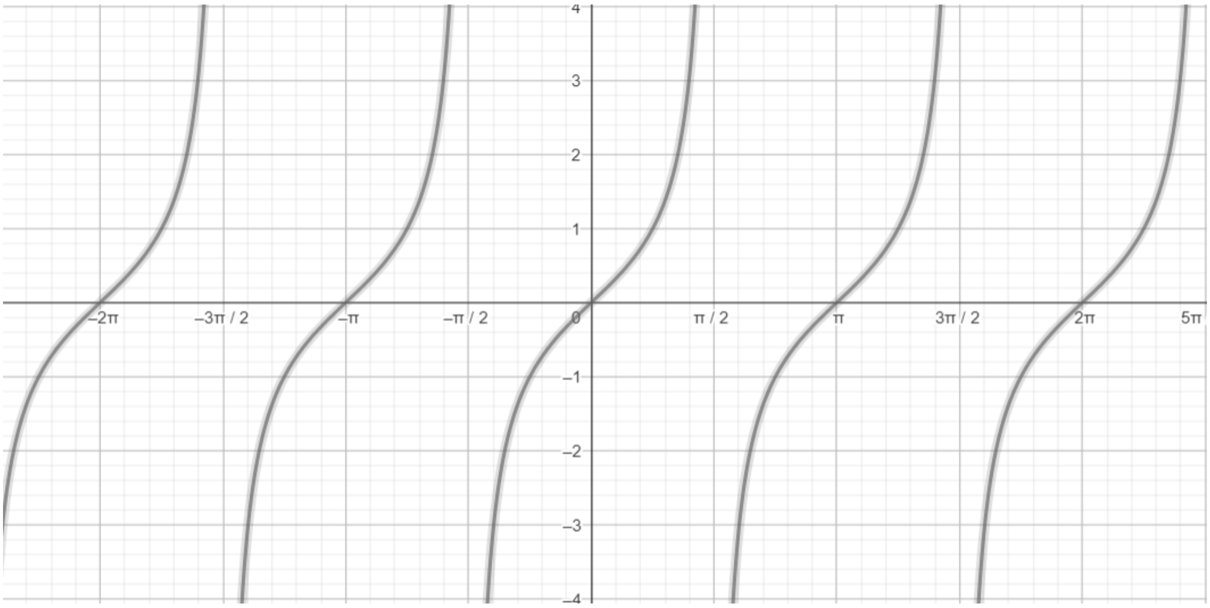


Fonte: Produção dos autores

A função seno é considerada uma função ímpar, pois há uma simetria no gráfico em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, $sen(-x) = -sen(x)$.

$f(x) = tg\ x$

Figura 92 – Ilustração de uma função ímpar: $f(x) = tg\ x$



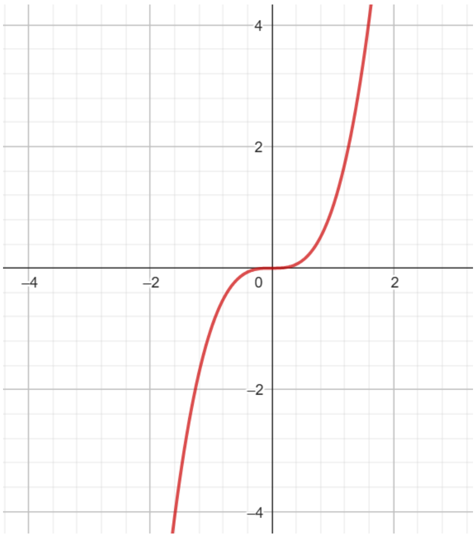
Fonte: Produção dos autores

A função tangente é considerada uma função ímpar, pois há uma simetria no gráfico em relação a origem do plano cartesiano, ou seja, $tg(-x) = -tg(x)$.

Observando outro exemplo de função ímpar:

Exemplo: $f(x) = x^3$

Figura 93 – Representação gráfica de uma função ímpar: $f(x) \ = \ x^3$

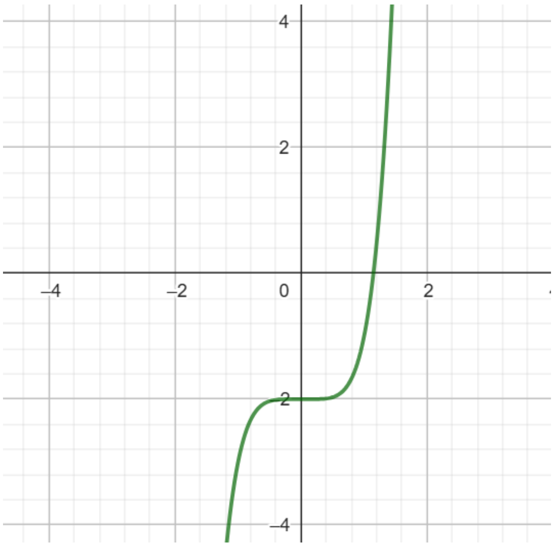


Fonte: Produção dos autores

Para qualquer valor de $x, f(x) \ = \ -f(-x)$, porque o cubo de um número é igual ao oposto do cubo do seu oposto.

Exemplo: $f(x) \ = \ x^{\mathbf{5}} + 2$

Figura 94 – Gráfico da função ímpar $f(x) \ = \ x^5 + 2$



Fonte: Produção dos autores

4- Exercícios (35 min)

1- (PUC-PR) Supondo que, por motivos de segurança, em um determinado porto, certos navios são autorizados a atracar (ou permanecer ancorados) somente durante os intervalos de tempo em que a profundidade no canal desse porto não é inferior a 13 metros e que devido ao comportamento das marés essa profundidade P, em metros, varia em função do tempo t, em horas, de acordo com a função $P(t) = 10{,}5 + 5\,.\,sen\,(t\,.\frac{\pi}{12})$, durante quanto tempo, aproximadamente, uma dessas embarcações poderá ficar ancorada no referido porto se a mesma atracar às 4 horas?

a) 2 horas

b) 4 horas

c) 6 horas

d) 8 horas

e) 10 horas

Resposta: letra c. Ao realizar o cálculo da função, obtemos que a maré fica acima de 13 metros entre as $t = 2$ até $t = 10$. Como ele atracou as 4 horas, ele poderá permanecer até as 10h. logo ele poderá permanecer apenas 6 horas.

Avaliação: A avaliação será realizada por meio do acompanhamento da resolução dos exercícios e da observação da participação ativa na aula.

REFERÊNCIAS

ALUÍZIO, Professor**. Função par e função ímpar**. *Blog do Professor Aluízio*, 2023. Disponível em: https://www.professoraluizio.com.br/Blog/269/funcao-par-e-funcao-impar/. Acesso em: 16 out. 2024.

BRASIL ESCOLA. **Funções trigonométricas**. *Brasil Escola*, 2023. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm. Acesso em: 16 out. 2024.

EDUCAÇÃO, Sistema Marista de. **9ºano Matemática Módulo 3**: ensino fundamental anos finais. 2. ed. Bela Vista: Editora Ftd, 2024. 192 p.

LEMES, Matheus. **Parâmetros das funções trigonométricas**: matemática - manual do enem. Matemática - Manual do Enem. 2023. Disponível em: https://querobolsa.com.br/enem/matematica/parametros-das-funcoes-trigonometricas. Acesso em: 13 out. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Funções Trigonométricas**. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas.htm. Acesso em: 13 out. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Tangente**. Mundo Educação. Disponível em: https:// https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/tangente.htm. Acesso em: 13 out. 2024.

QUEROBOLSA. **Funções pares e ímpares.** Disponível em: https ://querob.com.br /pt/matemática /f-pares -e-impara. Acesso em: 17 nov. 24

Relatório Promat aula 9 – (23/11/2024)

A aula ocorreu no dia 23 de novembro. Esperamos 15 minutos para que os alunos chegassem. Iniciamos a aula pedindo para que um dos alunos lesse, o que era a função seno e estava apresentado no slide. Após a leitura foi feita uma explicação e foi realizada a construção do gráfico com os alunos, explicando cada passo para que eles entendessem de que forma era feita a construção.

Após a explicação do gráfico de seno foi feita a explicação de domínio, contradomínio e imagem da função, utilizando um diagrama de flechas para que os alunos conseguissem compreender. Enquanto ocorria a explicação os alunos interagiam, tirando dúvidas e lendo os textos dispostos nos slides, foi mostrado através dos slides e do geogebra o que ocorria com as funções senoide.

Olhando para a função cosseno foi realizado a construção do gráfico e explicado como ele ocorria e as suas funções cossenóides, mostrando também como ficaria no geogebra para que eles entendessem melhor. Alguns alunos estavam bastante participativos respondendo às perguntas e auxiliando nas construções dos gráficos.

Comentando as funções tangente foi realizado o gráfico, explicando como ela está no círculo trigonométrico. Para descobrirmos quantos que era 30º em radianos, foi feita uma regra de três para mostramos aos alunos como era realizado em caso de dúvidas. Para iniciarmos a construção do gráfico de tangente foi perguntado quantos que era a tangente de zero. A sala inteira ficou em silêncio então foi explicado e realizado a montagem do gráfico passo a passo com os alunos. Explicando também sobre o seu domínio e imagem e suas funções tangenóides. Uma aluna saiu antes do intervalo pois iria ao dentista com a permissão de seus responsáveis.

Após o intervalo, começamos falando sobre os períodos, o que era e como ocorria em cada função. Os alunos liam os enunciados que estavam apresentados nos slides e logo fazíamos a explicação. Cada explicações havia exercícios para os alunos fazerem, então a primeira foi feita como exemplo e com auxílio dos alunos e após isso passamos as questões no slide e fomos comentando com a turma cada uma delas.

Dando sequência, foi explicado sobre as funções pares e ímpares. Quando mostramos para os alunos as características de cada função, explicando também que esse tipo de definição não se aplica somente as funções trigonométricas dando como exemplo a função quadrada para par e a função ao cubo para ímpar. Os gráficos dos exemplos foram mostrados no slide para que os alunos observassem, sobraram 10 min da aula livre então fizemos um Kahoot com os alunos sobre trigonometria para fazer uma revisão do conteúdo trabalhado nessa e nas aulas anteriores.

Figura 95 – Explicação da função tangente e o jogo kahoot

Fonte: Acervo dos autores

2.10 AULA 10 (30/11/2024) – PLANO DE ATIVIDADE DE ENCERRAMENTO E RELATÓRIO

Plano de Atividades de Encerramento

O encerramento do Promat ocorreu na cantina da faculdade, onde foi realizada uma gincana com os alunos. O objetivo foi promover a interação entre os participantes, permitindo que eles se misturassem e conversassem entre si. Para a formação das equipes, foram distribuídas fitas de TNT de cores diferentes (azul forte, azul claro, branco, verde, vermelho, preto, roxo e rosa), resultando em grupos de, em média, cinco alunos. Os alunos que chegaram atrasados foram integrados a equipes já formadas.

As atividades foram organizadas por cada dupla de estágio, contando também com a participação dos alunos da disciplina de Metodologia de Estágio I, o que permitiu reunir todas as turmas para a competição. Ao final, a equipe vencedora foi determinada pela somatória dos pontos obtidos por cada grupo ao longo da gincana. A seguir, são apresentadas as atividades desenvolvidas por cada dupla:

Responsáveis pela atividade: Maíri Poeta Castilho da Silva e Michelli Neves Lavagnoli

Desenvolvimento:

A atividade com os quebra-cabeças consiste em resolver o problema de raciocínio lógico de cada envelope para obter as peças dos quebra-cabeça. Vale ressaltar que o grupo só pegará o próximo envelope se ele conseguir montar todas as peças que já possui. O quebra-cabeça montado inteiro vale 10 pontos (0,25 vezes cada peça montada), caso haja empate, o desempate é realizado através da maior quantidade de peças montadas no menor número de tempo.

Figura 96 – Imagem do quebra-cabeça

Fonte: Produção dos autores com auxílio de IA

Problemas de lógica:

1.Como dividir uma pizza em 8 pedaços realizando apenas três cortes?

R: Basta cortar a pizza em 4 partes com dois cortes perpendiculares e um corte circular, como se fosse pôr recheio na pizza, tem-se assim 8 pedaços.

2.Existem quantas maneiras de se ter vinte e cinco reais apenas com cédulas de um, cinco e dez reais?

R:12

3.Um estudante terminou um trabalho que tinha n páginas. Para numerar todas essas páginas iniciando com a página 1, ele escreveu 270 algarismos. Então o valor de n é?

R:126

4.O pai do Padre é o único filho do meu pai. O que o Padre é meu?

R: filho.

5.A escada de um prédio tem 25 degraus. Se Maria subiu 5 degraus, desceu 9 e ao subir mais 6 viu que só faltavam 3 degraus para chegar ao último degrau da escada, em que degrau ela estava quando começou a contar?

R: 20

6. Sabe-se que:

Rifa tem 6 (seis) anos a mais que Ana e 13 (treze) anos a mais que Bia;

Paula tem 6 (seis) anos a mais que Bia.

Então, com relação as 4 (quatro) pessoas citadas, é correto dizer que:

a) Rifa não é a mais velha;

b) Ana é a mais nova;

c) Paula é mais nova que Ana;

d) Paula e Ana tem a mesma idade;

e) Rifa e Paula tem a mesma idade.

R: Paula é mais nova que Ana.

REFERÊNCIAS

ASTH, Rafael C.. **Desafios matemáticos para estimular seu raciocínio**. Publicado em Toda matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/desafios-matematicos/#:~:text=A%20escada%20de%20um%20pr%C3%A9dio,estava%20quando%20come%C3%A7ou%20a%20contar%3F&text=Resposta%20correta%3A%20Maria%20estava%20no%20vig%C3%A9simo%20degrau.. Acesso em: 18 out. 2024.

Calcule mais. 2004. Disponível em: https://calculemais.com.br/exercicios-de-matematica/835/raciocinio_logico-exercicio-exercicio_19. Acesso em: 16 nov. 2024.

CLUBES de Matemática da OBMEP: Probleminha corte a pizza. Probleminha corte a pizza. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-corte-a-pizza/#:~:text=Como%20dividir%20uma%20pizza%20em%208%20peda%C3%A7os%20realizando%20apenas%20tr%C3%AAs%20cortes%3F&text=Basta%20cortar%20a%20pizza%20em,tem%2Dse%20assim%208%20peda%C3%A7os.. Acesso em: 18 out. 2024.

DESAFIO de lógica 215. Disponível em: https://www.concursos.com.br/desafios/desafio-logica-215.htm#:~:text=O%20pai%20do%20padre%20%C3%A9,que%20eu%20sou%20do%20padre%3F&text=Resolu%C3%A7%C3%A3o%3A%20A%20resposta%20correta%20%C3%A9,eu%20o%20pai%20do%20padre.. Acesso em: 18 out. 2024.

FUVEST. Publicado em: Passei direto. Disponível em: https://www.passeidireto.com/pergunta/146532468/14-fuvest-um-estudante-terminou-um-trabalho-que-tinha-n-paginas-para-numerar-tod. Acesso em: 18 out. 2024.

MATEMÁTICA. 2001. Prova objetiva PUC Rio. Disponível em: https://www.puc-rio.br/vestibular/repositorio/provas/2001-2/matoo.html. Acesso em: 18 out. 2024.

Responsáveis pela atividade: Shimmer e Ruan

Desenvolvimento: O jogo Set!

O jogo SET! é um jogo competitivo em tempo real em que cada jogador buscar formar conjuntos de cartas entre as do tabuleiro. Cada carta do jogo possui quatro características (forma presente, cor, preenchimento e quantidade de formas). Um SET é um conjunto de três cartas, em que cartas entre as cartas, cada uma das características devem ser todas diferentes. Um jogador embaralha todas as cartas e, então, posiciona 12 cartas no tabuleiro. Os jogadores irão competir contra os professores, buscando encontrar SETs dentre as cartas presentes. Quando um jogador encontra um SET, ele anuncia para o grupo, mostra as cartas encontradas e, se for realmente um SET, ele as toma para si. Em seguida, as três cartas são repostas e o jogo continua.

O jogo vai percorrer por 20 minutos. Ao final desse tempo, os jogadores contarão a quantidade de SETs formados. Cada SET contará por cinco pontos. O grupo vencendo será aquele que tiver mais SETs.

Responsáveis pela atividade: *Alisson, Anderson, Cassiano e Vitor – Caça ao tesouro (medidas trigonométricas) e RPG (Plano Cartesiano)*

Desenvolvimento: RPG – Plano Cartesiano (20 min)

Para adaptar o RPG para uma atividade rápida e pontuável, removeremos o aspecto narrativo e utilização de personagens. Utilizaremos os mapas com desafios relacionados com Geometria Analítica. Serão utilizados os 16 mapas disponíveis, formando 4 planos cartesianos com 4 quadrantes cada. Cada plano cartesiano será composto por 4 desafios, distância entre pontos, ponto médio de segmento e equações e intersecções de retas, em que cada um destes são elementos gráficos do mapa.

A pontuação será dada ao resolverem os desafios e completarem os mapas, são 0,5 pontos por desafio e 0,5 pontos ao fecharem um mapa, totalizando 2,5 pontos por mapa e 10 pontos totais. Abaixo seguem os mapas e os desafios pertinentes a cada um.

Figura 97 – Mapa 1 do RPG

Fonte: Alisson, Anderson, Cassiano e Vitor

Desafios:

1- *"Centralizado entre o cacto mais ao leste e o poste mais ao sul, encontra-se o próximo desafio".*

Esse enigma faz referência ao cacto localizado no ponto (9,3) e o poste no ponto (-4,-8), e quando se diz centralizado entre esses pontos está pedindo para calcular o ponto médio entre eles. No caso (2.5, -2.5).

2- *"Duas retas, uma formada pela estátua destruída e o poste ao norte do templo alagado, e a outra formada pela lanterna e o peixe que nada para o sul. O ponto de encontro dessas linhas indica o próximo desafio."*

Essa dica faz referência à estátua danificada (-7, 6), ao poste (-7, -1) no templo, ao peixe (-1, -3) e a lanterna (-3, -1). O enigma solicita que os alunos calculem o ponto de intersecção das retas formadas pela estátua e o poste ($x = -7$) e a reta formada pelo peixe e a lanterna ($-x - y = 4$), o ponto de intersecção é a estátua inteira na igreja (-7, 3).

3- *"Para encontrar o próximo desafio, é necessário descobrir a distância entre o escaravelho e a fogueira"*

Escaravelho (5, 8), a fogueira (8, -8), e a distância é 16,28 unidades.

4- *"Qual a equação da reta que passa pela raíz morta e a grande pirâmide?"*

Esse desafio trata da equação da reta formada pela árvore seca (3, -3) e o topo da pirâmide (7, 7), que é ($-5x + 2y = -21$).

Figura 98 – Mapa 2 do RPG

Fonte: Alisson, Anderson, Cassiano e Vitor

Desafios:

1- *"Para avançar para o próximo desafio, responda: qual é a fórmula que descreve com precisão a linha que passa por essa muralha?"*

O desafio envolve calcular a equação da reta que passa pela muralha do deserto ($2x + y = 24$).

2- *"Na antiga ruína, uma velha mesa repousa, enquanto no santuário, um altar venerado ergue-se em silêncio. Qual a distância entre os dois?"*.

Esse enigma solicita que seja calculada a distância entre a mesa da ruína (-4, -7) e o altar no templo (6, -2), que é 11,18 unidades.

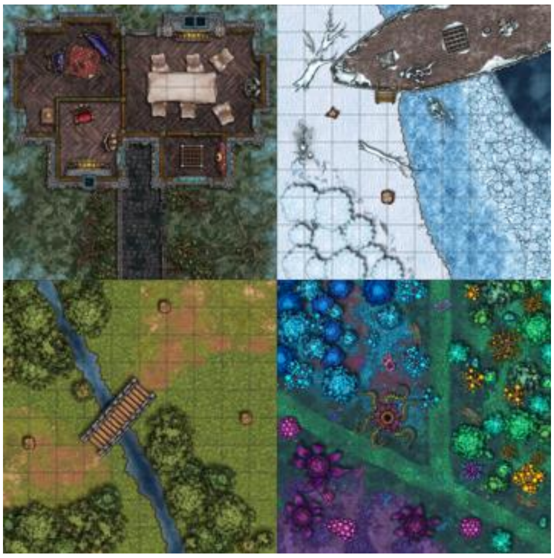
3- *"Em meio fogo um rio de lava corre fervente, enquanto um caminho perdido se esconde entre as areias quentes. A interseção entre essas duas retas revela indica o próximo desafio"*.

Esse desafio se refere ao rio de lava no inferno ($2x - 3y = -11$) e o caminho escondido no deserto ($9x - 4y = 18$) e pede sua intersecção (5.16, 7.11).

4- *"No deserto, jaz o crânio de uma besta desconhecida, e no templo, o pergaminho dos segredos esquecidos. O próximo desafio se encontra no ponto médio dos dois"*.

Essa dica solicita o ponto médio entre o crânio (4, 1) e o pergaminho (4, -2), no caso (4, -0.5).

Figura 99 – Mapa 5 do RPG



Fonte: Alisson, Anderson, Cassiano e Vitor

Desafios:

1- *“Em meio a floresta existe um rio que corre de forma linear, descubra a fórmula que guia o seu caminho para o encontrar o próximo desafio”*.

Esse enigma solicita que os alunos calculem a equação do rio ($2x + y = -17$).

2- *“Entre o medo e o gelo, uma distância deve ser encontrada, um antigo e abandonado poço e a entrada para um porão gelado”*.

Para esse enigma é necessário calcular a distância entre o poço (-1, 1) e a porta do porão do navio (4, 8), que é 8,6.

3- *“Para encontrar o próximo desafio, ache a intersecção de duas retas, uma formada pela poltrona rasgada na mansão e pela bússola no navio e a outra que passa pela ponte”*.

Esse desafio requere que o aluno encontre o ponto de intersecção entre a reta da ponte ($-x + y = 1$), e a reta formada pela poltrona rasgada e bússola ($y = 8$), que nos deixa com o ponto (7, 8).

***4-** “Na floresta encantada, entre a bela flor ao sul e a planta carnívora, o próximo desafio se encontra”.*

Nesse desafio, é preciso encontrar o ponto médio entre a flor mais ao sul da floresta (5, -9) e a planta carnívora (4, -5), que é (4.5, -7).

Figura 100 – Mapa 6 do RPG

Fonte: Alisson, Anderson, Cassiano e Vitor

Desafios:

1- *“Para avançar é preciso encontrar a intersecção de duas retas. Uma delas passa pelo sofá antigo da fazenda, um local de descanso e lembranças. A outra está no cemitério, entre os túmulos esquecidos, passando por um túmulo ao lado oeste do anjo guardião e o outro logo ao sul do primeiro, depois do caminho de pedra”*.

Esse desafio solicita que os jogadores encontrem o ponto de intersecção das retas formadas pelo sofá na fazenda ($x + y = 1$), e a reta formada pelos túmulos (-7, 5) e (-7, 2), a reta ($x = -7$), o ponto de intersecção é (-7, 8).

2- *“O próximo desafio se encontra no ponto médio de dois elementos. A cabeça de um cervo, que guarda memórias antigas, e um poço, onde a água guarda a promessa de sobrevivência”*.

Esse desafio pede o ponto médio entre o cervo (9, -3) e o poço (3, -5), e o ponto médio é (6, -4).

3- *“Nas planícies cartesianas esquecidas, a estátua de um anjo observa silenciosamente o horizonte, enquanto um velho barril de madeira flutua, cheio de segredos do passado. Qual a distância entre os dois?”*

Nesse desafio os jogadores precisam descobrir a distância entre o anjo (-5, 5) e o barril (-9, -8), que é 13,6.

4- *“De um lado, morto entre as palmeiras. Do outro, a estátua de Anúbis, o guardião das almas. Para prosseguir, vocês devem traçar o caminho que une esqueleto e a estátua de Anúbis”*.

Esse desafio solicita que os jogadores encontrem a equação de reta que passa pelo esqueleto (-2, -2) e a estátua de Anúbis (3, 4), que é ($-6x + 5y = 2$).

Desenvolvimento: Caça ao Tesouro

Para realizar o jogo Caça ao Tesouro serão necessárias 3 estações, o qual teremos desafios que inclui medidas de arco e ângulos no ciclo trigonométrico.

Cada grupos terá um percurso de estações definidas antecipadamente.

1º Desafio: será entregue a primeira pista o qual o grupo encontrará o 1º desafio, e contemplado a resposta, o grupo recebe 2ª pista para o próximo Desafio. Assim por diante até o último desafio.

Desafio 1:

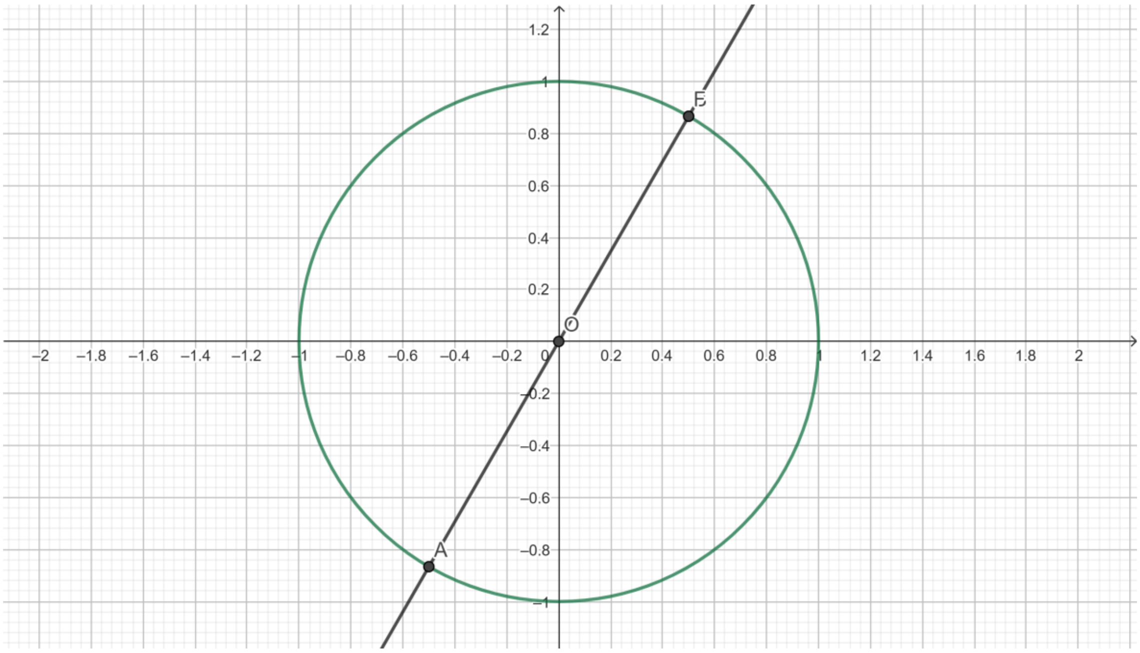
“Um relógio analógico marca 5 horas. Qual é o menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos?”

Resposta: 150º

Desafio 2:

Construa o ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes aos ângulos $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$. Qual a figura geométrica se formou?

Resposta:



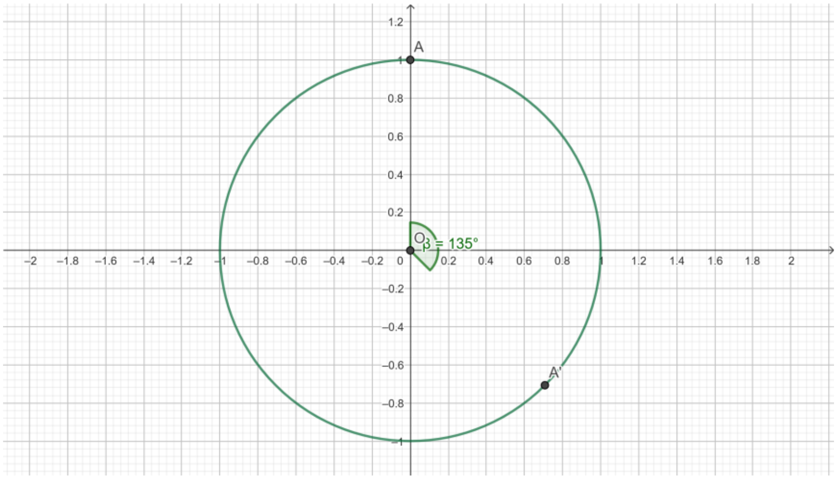
Como os 2 ângulos coincidem no ponto A e 2 ângulos coincidem no ponto B. Logo formam um segmento de reta.

Desafio 3:

Uma roda gigante possui raio de 20 metros. Se um passageiro está no ponto mais alto da roda gigante e gira um ângulo de 135º no sentido horário, qual será sua nova altura do solo?

Resposta: ao girar um ângulo de 135º, o passageiro está a 45º do eixo horizontal e vertical da roda gigante, no 4 quadrante.

Para determinar a altura, será:



$$Altura = r - rSen(45º) = 20 - 20\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 - 10\sqrt{2} \cong 20 - 14,14 \cong 5,86\ metros$$

Pista 1: Sempre podemos encontrar conhecimento, mas existe um lugar que é especial, que você encontra conhecimento em páginas. O próximo desafio está em frente deste lugar, nas flores que perfumam o lugar.

A pista leva em frente a Biblioteca.

Pista 2: Homenagem ao governador Mario Pereira, existe um monumento na Unioeste. O Próximo desafio está aos arredores do monumento.

A pista leva ao Monumento Mario Pereira.

Pista 3: Para subir ou descer, é necessário girar como se fosse um ciclo trigonométrico. O próximo desafio encontra-se na base deste ciclo.

A pista leva para o R.U.

Marca o máximo de pontos o grupo que resolver o último desafio em até 20 minutos.

Responsáveis pela atividade: Fabrício Adriel Rustick e Milleni Ferreira de Souza

Desenvolvimento: Adivinhando Volume, Peso e Comprimento.

Inicialmente vamos encher os recipientes com quantidades variadas de líquido, e realizar a medição do peso e comprimento dos objetos selecionados.

Cada grupo deverá estimar o volume, peso e comprimento dos objetos indicados. Serão 4 objetos para estimar o volume, 3 objetos para estimar o peso e 3 objetos para estimar o comprimento.

Os objetos escolhidos para a unidade de medida peso foram uma caixa com bolinhas de gude (1,100 kg), um notebook (1,730 kg), um kindle (255g) e uma garrafa com um pouco de água (75g). Para a unidade de medida comprimento, foram escolhidos uma caixa (20,5cm), um canudo de formatura (31cm) e um pedaço de barbante (1,65m). Por fim, para o volume, foram escolhidos uma tampinha (10ml), um cilindro obliquo (1400ml) e um poliedro (750ml).

A pontuação de cada grupo será atribuída de acordo com as medidas informadas mais próximas das corretas.

Responsáveis pela Atividade: Felipe K. e Felipe S.

Desenvolvimento: Jogo de raciocínio lógico envolvendo feijões

Será trabalhado um jogo de raciocínio lógico com os estudantes, o qual tem as seguintes regras:

1) Jogam dois jogadores, um contra o outro. Há 8 feijões em uma mesa e cada jogador possui 5 feijões em sua mão.
2) O jogo é jogado em turnos. Na sua vez, o jogador é obrigado a fazer uma única ação. As ações são:

- Pegar 1, 3 ou 4 feijões da mesa e colocá-los em sua mão;
- Colocar 1, 3 ou 4 feijões da sua mão na mesa.

3) Ganha o jogador que coletar o último feijão da mesa.

Todos os alunos jogarão em conjunto contra os professores. Este jogo é planejado de tal modo que o primeiro jogador a jogar, se jogar corretamente, sempre ganhará. Não daremos essa informação de início aos alunos, mas deixaremos com que o primeiro turno seja sempre deles.

A fim de vencer o desafio, a estratégia a ser adotada pelos estudantes deve ser a de pegar ou depositar feijões na mesa de modo que, ao fim do seu turno, haja 2, 7, 9, 14 ou 16 feijões sobre a mesa.

Serão jogadas cinco partidas com os estudantes. A primeira valerá 5 pontos. A segunda 10, a terceira 10, a quarta 25 e a quinta 30 pontos. O intuito do valor baixo nas primeiras tentativas é o de fazer com que os estudantes as utilizem para testar o jogo e criar uma estratégia.

Ao final das 5 partidas, falaremos que o primeiro a jogar sempre irá ganhar e será solicitado aos estudantes que expliquem a estratégia necessária para vencer o jogo e os professores irão avaliar a explicação, recompensando-a com pontos.

Se os estudantes elaborarem uma resposta que atinja o nível “precisamos deixar 2 feijões na mesa”, serão dados 15 pontos a eles. Se o nível da explicação atingir “precisamos sempre deixar 2, 7, 9, 14 ou 16 feijões na mesa ao fim do nosso turno", então os estudantes ganharão mais 10 pontos (totalizando 25). Por fim, se a explicação ficar bem elaborada a nível de "ao fim do nosso turno, precisamos sempre fazer com que o número de feijões sobre a mesa seja um múltiplo de 7 ou um múltiplo de 7 mais duas unidades", eles ganharão mais 5 pontos (totalizando 30) nessa atividade final.

Somando a quantidade máxima de pontos a serem feitos pelos estudantes, obtemos 110 pontos. Entretanto, caso a pontuação exceda 100 pontos, esses pontos extras serão desconsiderados e os alunos receberão a nota máxima de 100 pontos na gincana.

Responsáveis pela atividade: Eduardo e Milena

Desenvolvimento: Atividade Pega-Varetas

Vamos pedir para que os alunos se dividam em dois grupos A e B.

Para este jogo de pega-varetas, vamos reduzir as varetas apenas às cores azul (3 pontos) e amarela (5 pontos).

Cada grupo se dividirá novamente em dois grupos menores ($A_1, A_2, B_1\ e\ \ B_2$) para jogar uma partida de pega varetas (A_1 contra A_2 eB_1 **Luiz**ontra B_2). De acordo com o número de varetas pegas por cada grupo (A e B), formarão um sistema linear de duas incógnitas para que o outro grupo resolva (A ou B). Para cada sistema linear elaborado e resolvido corretamente, os alunos somarão 10 pontos.

Os alunos poderão jogar, elaborar e resolver tantos sistemas quanto possíveis no tempo de 25 minutos, para somar a maior quantidade de pontos possível.

Os professores estarão responsáveis por acompanhar a execução e verificar se os sistemas foram elaborados e resolvidos corretamente.

Responsáveis pela atividade: Luiza

Desenvolvimento: Jogo das borboletas

Assim que os alunos chegarem, será entregue 3 cartas ao grupo e 3 para o professor e as regras serão explicadas:

Os jogadores poderão colocar uma carta em uma linha conectando uma das borboletas centrais com outra borboleta, após colocar a carta, se ela tiver uma seta vermelha será realizada a subtração e se a seta for azul, será realizada a soma do valor da carta nos botões das borboletas ligadas pela linha. Na primeira carta, os alunos podem determinar a quantia de botões em cada borboleta, respeitando o valor e a operação da carta colocada. Em seguida, será a vez do professor, que colocara uma carta e botões correspondentes a operação e valor da carta. E assim sucessivamente, a cada triângulo formado com as cartas, o jogador responsável pela carta que fechou o triângulo ganha 1 ponto, se formarem um losango, ganha 2 pontos. Totalizando no máximo 10 pontos.

Relatório Promat aula 10 – (30/11/2024)

No dia 30 de novembro de 2024 realizamos o 10º encontro do PROMAT, o qual foram realizadas diversas atividades diferentes. A organização da gincana foi realizada pelos estagiários, pelos professores e pelos orientadores; ao todo foram realizadas 9 atividades.

Neste dia todos os alunos foram reunidos na cantina, próximo ao Restaurante Universitário, em seguida realizamos a separação dos grupos por cores e definimos em qual atividade cada um iria começar. Os alunos possuíam um tempo de aproximadamente 20 minutos para realizar a atividade da vez e ao finalizar esse tempo, eles se dirigiam para a próxima atividade da esquerda, realizando assim, todas as atividades presentes.

Relatório do grupo Maíri e Michelli

O primeiro grupo a participar do jogo “Quebra-Cabeça com problemas de raciocínio Lógico” foi o grupo da cor azul. Em um primeiro momento foi explicada como eles deveriam proceder na atividade e durante a resolução foram dadas dicas conforme a necessidade.

O mesmo processo ocorreu com todos os grupos que passaram por esta atividade. Como o tempo era curto e a atividade tinha que ser reorganizada a cada partida, não foi possível anotar e destacar pontos específicos de como cada grupo realizou o jogo proposto, entretanto há algumas observações que foram semelhantes em praticamente todos os grupos.

Na questão 1, os grupos utilizaram do rascunho para desenhar a pizza e em seguida tentavam de diferentes maneiras realizarem os três cortes para obter os oitos pedações. Houve casos em que eles resolveram o problema realizando 3 cortes curvos, 1 corte circular e 2 cortes retos e o mais diferente foi considerar a folha de rascunho uma pizza, cortar ela no meio, sobrepor os pedaços cortar no meio novamente e realizar esse processo mais uma vez, tendo ao final os 8 pedações.

A questão 2 pedia de quantas maneiras era possível ter R$25,00 com cédulas de R$1,00, R$5,00 e R$10,00. Todos os grupos realizaram essa atividade escrevendo no rascunho cada possibilidade que poderiam formar com cada cédula. Esse meio de resolução usufruiu de mais de 5 minutos para que fosse obtida uma resposta e isso era muito tempo, visto que havia mais questões a serem resolvidas.

Na questão 3 foi realizado o mesmo processo da questão 2. Os grupos anotaram no rascunho quantas eram as páginas apenas com 1 algarismo, as páginas com 2 e as páginas com 3 algarismos. Em seguida os grupos contabilizavam os valores até obter os 270 algarismos utilizados.

A questão 4 foi respondida por todos os grupos rapidamente. Houve uma pequena confusão na compreensão do enunciado, entretanto eles contornaram esse problema realizando alguns desenhos na folha de rascunho.

Como depois de alguns minutos da gincana foi necessário reduzir o tempo, nem todos os grupos conseguiram realizar as questões 5 e 6, consequentemente eles não conseguiram concluir a montagem do quebra cabeça.

A questão 5 foi realizada pelos grupos que conseguiram chegar nela de maneira semelhante ao processo da questão 3. Apenas em um caso específico, uma menina conseguiu resolver esse problema apenas utilizando o raciocínio lógico e cálculo mental.

A questão 6 foi a que mais confundiu os alunos. Eles tentavam resolver o problema utilizando sistemas lineares e tentando descobrir o valor das variáveis. Entretanto não é possível chegar a uma idade fixa, era sim possível resolver por sistemas lineares, entretanto o segundo passo era apenas de interpretação. Devido ao tempo e as questões de interpretação, apenas dois grupos (azul e branco) conseguiram resolver as 6 questões e montar o quebra-cabeça inteiro.

Em relação a montagem do quebra-cabeça, ela ocorreu em paralelo a resolução das questões. Normalmente os grupos se dividiam em dois, alguns deles ficavam responsáveis pela montagem e o restante ficavam responsáveis pela resolução.

Durante a atividade, todos os grupos se apresentavam animados e frenéticos para resolver as questões e obterem as peças do quebra-cabeça o mais rápido possível.

Como o jogo estava sendo realizado apenas pela estagiária Michelli, houve momentos em que outra partida já havia sido iniciada e ela ainda estava organizando as peças no envelope e contabilizando o tempo para caso houvesse empate. Devido a isso, não foi possível anotar os detalhes que chamaram a atenção na resolução de cada grupo de maneira separada.

Ao final da gincana, todos os estagiários se juntaram para contabilizar os pontos e posteriormente informar qual foi o grupo vencedor.

Relatório do grupo Fabrício e Milleni

A atividade apresentada pela dupla foi de “adivinhação” de volume, peso e comprimento, os materiais escolhidos para a unidade de medida peso foram uma caixa com bolinhas de gude (1,100 kg), um notebook (1,730 kg), um kindle (255g) e uma garrafa com um pouco de água (75g). Para a unidade de medida comprimento, foram escolhidos uma caixa (20,5cm), um canudo de formatura (31cm) e um pedaço de barbante (1,65m). Por fim, para o volume, foram escolhidos uma tampinha (10ml), um cilindro obliquo (1400ml) e um poliedro (750ml).

A pontuação de cada grupo foi atribuída de acordo com as medidas informadas mais próximas das corretas.

No decorrer da atividade pudemos notar diferentes estratégias dos grupos para realizar essa estimativa, como balançar o objeto, tentar comparar o tamanho dos objetos com tamanho da mão, a maioria dos grupos tentava relacionar os pesos dos objetos com o peso do pacote de arroz de 1 kg, pacote de feijão, entre outros objetos disponíveis.

Havia grupos também que apenas dois tentavam obter uma estimativa próxima do real e os outros ficavam olhando não tendo a oportunidade de opinar. Então, nesses momentos, nós pedíamos a opinião desses outros alunos, para que todos se envolvessem buscando estratégias de obter valores razoáveis e a fim de que a atividade se mostrasse proveitosa para a aprendizagem de todos os integrantes de cada grupo.

Na maioria dos grupos, todos os membros pegavam os objetos na mão e tentavam dar uma opinião, havia conversa com as possibilidades que cada participante opinava e eles utilizavam os valores que a maioria do grupo tinha votado.

Em cada objeto, demos a oportunidade de os grupos optarem com três valores, sendo que eliminaríamos um valor que estivesse mais longe do real, para que eles escolhessem um dos dois que eles achariam que seria o correto.

Ao desenvolver essa dinâmica conseguimos fazer com que os alunos pensassem mais em suas respostas e conversassem com o grupo. Eles ficavam bastante felizes quando percebiam que chegavam próximos aos valores e um pouco indignados quando escolhiam alguns valores muito diferentes dos corretos.

A atividade teve um bom desenvolvimento, tivemos feedbacks positivos dos alunos, tanto no que diz respeito ao seu envolvimento e aprendizagem de medidas de comprimento, volume e capacidade. Ainda disseram que gostaram da atividade desenvolvida.

CONSIDERAÇÃO FINAIS

Durante o estágio priorizaram-se atividades práticas para estimular a reflexão dos alunos, em contraste com o ensino tradicional. No entanto, algumas aulas demandaram uma abordagem mais tradicional, resultando em menor engajamento, o que reforça a importância de métodos dinâmicos para manter o interesse dos estudantes.

As aulas alcançaram seus objetivos com esforço conjunto de alunos e dos estagiários. Jogos e dinâmicas foram as metodologias mais eficazes, incentivando a participação. O feedback dos alunos ajudou a aprimorar as estratégias de ensino.

Desenvolver este projeto foi muito importante para a nossa formação é uma oportunidade de pôr em prática o que é visto em sala de aula, ministrar uma sala e poder estar à disposição do aluno é uma experiência que não iremos esquecer, poder contar com nossos orientadores em sua ajuda e em seu apoio tornou o processo mais leve. Por fim, podemos dizer com a certeza de que esta experiência foi importante para o nosso crescimento pessoal e profissional e ficará marcada em nossa trajetória.